ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 7 MAI 1928.

PRÉSIDENCE DE M. MAURICE HAMY.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** souhaite la bienvenue à M. **Gautier**, Directeur honoraire de l'Observatoire de Genève, qui assiste à la séance.

ASTRONOMIE. — *Sur diverses méthodes employées pour le calcul des corrections de pendule*. Note (¹) de M. **G. Bigourdan**.

Ordinairement on conserve l'heure au moyen d'une bonne pendule dont on détermine astronomiquement les corrections successives (C_p *observés*) quand l'état du ciel le permet, c'est-à-dire à des époques irrégulièrement distribuées. Cependant il est indispensable d'avoir l'heure à intervalles réguliers si, comme le Bureau international de l'Heure (B. I. H.), on doit émettre ou observer des signaux horaires et en indiquer l'heure précise. Alors on calcule les corrections (C_p *calculés*, C_p *interpolés*) de la pendule au moyen de sa *marche*.

Pour augmenter la précision, pour avoir plus de sécurité, on a généralement plusieurs pendules, l'une dite *directrice* et les autres *témoins*, que l'on compare entre elles régulièrement avec toute la précision possible; alors le problème est indéterminé et le résultat réflète, en quelque sorte, la personnalité du calculateur. Comme, en outre, les C_p observés sont toujours affectés d'erreurs que chacun calcule et apprécie à sa manière, cela augmente encore l'indétermination. Ainsi chacun emploie une méthode spéciale, personnelle, et ce qui est grave c'est que les résultats, loin d'être concordants, absolus, dépendent de la méthode adoptée.

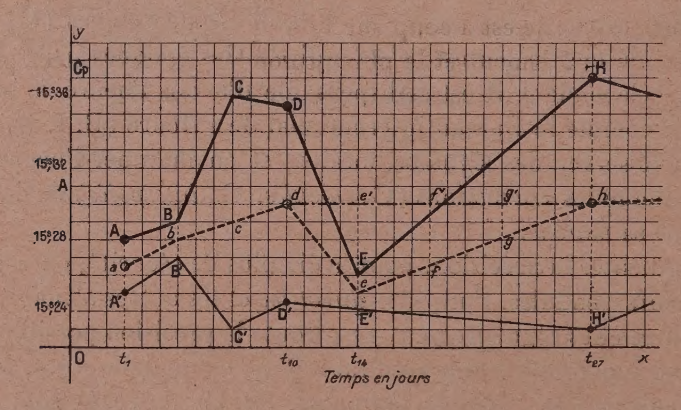
(¹) Séance du 16 avril 1928.

La méthode que j'emploie au B. I. H. depuis le commencement de 1920 a été indiquée plusieurs fois (voir notamment *Bulletin horaire*, III, p. 82). On lui a opposé une autre méthode dite de la *pendule moyenne*, et je veux montrer que celle-ci, *telle qu'on l'applique*, doit donner des résultats moins exacts.

Pour cela précisons bien d'abord les différences entre les deux méthodes : Dans la mienne, préalablement à tout calcul on étudie minutieusement, heure par heure en quelque sorte, la marche de chacune des pendules d'une manière continue, en utilisant leurs comparaisons mutuelles, qui sont faites de 12 en 12 heures; et cela permet de reconnaître si l'une ou l'autre a présenté quelque irrégularité momentanée, puis d'avoir égard à cet accident pour fixer l'heure aussi exacte que possible des signaux, etc., ce qui est un des buts essentiels.

Dans l'autre, un graphique préliminaire donne seulement une idée de la marche de la seule pendule directrice et l'on rejette tout C_p *observé* qui s'écarte du graphique de plus de $0^s,05$.

Pour montrer l'infériorité relative de cette dernière méthode, considérons d'abord le cas le plus simple, celui de deux pendules seulement, la pendule directrice et une pendule témoin, de même valeur ou *poids*. Représentons graphiquement la marche de la pendule directrice par ABCDEH... et



par A'B'C'D'E'H' celle de la pendule témoin; la pendule moyenne sera représentée par *abcdeh*..., le point *a* étant au milieu de AA', etc.

Par hypothèse on a obtenu astronomiquement des C_p observés aux dates t_1, t_{10}, t_{27},... correspondant aux points A et A', D et D', H et H',....

Si, ce qui pratiquement est fréquent, une des pendules a un changement de marche plus ou moins brusque, tel que celui figuré par la chute DE,

dans l'intervalle de deux C_p observés, ce changement reste inaperçu pour la méthode dite de la pendule moyenne, tandis que l'autre l'aura connue par l'étude minutieuse préalable des marches des pendules. Par suite, tandis que la *vraie* pendule moyenne est $abcdeh\ldots$, la méthode qui en prend à tort le nom adopte pour pendule moyenne $abcde'f'h\ldots$. Elle donne donc, entre les jours t_{10} et t_{27}, pour les C_p calculés, des erreurs représentées par ee', ff', gg', ...

Si l'on avait non deux pendules seulement, comme nous l'avons supposé, mais un plus grand nombre, le même raisonnement s'appliquerait encore évidemment.

Il existe aussi, entre les nombreuses méthodes employées, une troisième méthode, qui ne tient compte que de la seule pendule directrice; elle est aussi à rejeter, à plus forte raison même, puisqu'elle ne cherche même pas si cette pendule directrice a présenté quelque petit changement de marche : on pourra voir aussi (*Bull. h.*, III, p. 82) combien elle est à rejeter.

GÉOLOGIE. — *Nouvelles observations géologiques dans la Corse orientale : phénomènes d'écrasement et de laminage; mylonites et brèches tectoniques.* Note de MM. **Pierre Termier** et **Eugène Maury**.

La Corse orientale est à coup sûr l'un des pays de la Terre où les roches sont le plus fréquemment et le plus profondément déformées par le dynamisme orogénique. Au cours de notre récente étude [1], nos compagnons qui visitaient cette île pour la première fois ont été frappés par l'intensité du laminage, l'abondance des mylonites [2], le rôle grandiose des brèches tectoniques où l'on voit des roches diverses, originellement superposées ou juxtaposées, maintenant broyées ensemble et mécaniquement mêlées.

Déjà en 1897, M. E. Nentien [3], définissant le granite qu'il appelait *protogine* ou *granulite protoginique*, signalait la fréquence, dans cette roche, de la structure cataclastique et de l'allure gneissique. M. J. Deprat [4],

---

(1) Étude faite en commun avec MM. Steinmann, Kober, Staub, Tilmann et Raguin (*Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 1077-1081 et p. 1168-1172).

(2) Comme tous les tectoniciens, nous appelons *mylonite* toute roche écrasée, quelle qu'ait été sa nature originelle et quel que soit le type de son écrasement.

(3) *Étude sur la constitution géologique de la Corse* (*Mémoires pour servir à l'explication de la Carte géologique de la France*, Paris, 1897, p. 58-67).

(4) *Comptes rendus*, **141**, 1905, p. 151-153.

en 1905, a montré que le laminage et l'écrasement sont les traits les plus constants, les vrais caractères de la *protogine*, et que ces phénomènes vont parfois jusqu'à effacer tout aspect granitique. Quelques indications complémentaires sur le même sujet ont été données en 1908 par le même géologue et par l'un de nous (1), Enfin les auteurs des quatre feuilles *Luri*, *Bastia*, *Corte* et *Bastelica* de la Carte géologique (MM. Maury et Grandjean) ont fait ressortir la signification tectonique des écrasements et tracé les contours des régions particulièrement atteintes par la déformation.

Dans la réalité, les phénomènes déformateurs dépassent de beaucoup les descriptions qu'on en a données jusqu'ici. Ils s'exagèrent à l'approche des surfaces de charriage qui séparent les unités tectoniques. Voici, à ce propos, plusieurs observations nouvelles.

Mylonites dans la protogine. — Le laminage de la protogine est très inégal. La roche n'est jamais vraiment intacte, vraiment exempte de déformations intimes; mais elle a souvent gardé, dans un espace assez vaste, une allure presque homogène et un aspect de roche profonde et tranquille. Tout à côté d'une semblable région, d'apparence non troublée, une bande passe, plus ou moins puissante, où laminage et écrasement sont extrêmes. On y voit alors tous les degrés de la *mylonitisation*, jusqu'à celui qui donne une roche verdâtre compacte, l'*ultramylonite*. Le degré le plus habituel est celui du granite schisteux, qui se débite en feuillets ou en plaquettes. Au contact des Schistes Lustrés, il arrive que ces plaquettes, toujours parallèles à la surface de contact, deviennent très minces et ressemblent à des chloritoschistes quartzeux; les fines zones blanches ont l'air d'être formées exclusivement de quartz et ce n'est qu'au microscope qu'on y distingue les éléments feldspathiques broyés; l'épaisseur sur laquelle règne ce laminage excessif est ordinairement de quelques mètres, rarement de quelques dizaines de mètres. Les plus frappants exemples de profonde mylonitisation ont été observés par nous sur la route de Ghisonaccia à Ghisoni, entre Sampolo et un point distant de Ghisoni d'environ 5^{km}; d'autres, très comparables, sur la route de Tralonca, près de la chapelle San-Rocco; d'autres encore, sur la route de Ponte-Leccia à Aleria, près de Riccamone. Nous pourrions citer vingt autres endroits.

Ce qui est étonnant, c'est la largeur de la bande granitique affectée par le laminage, autrement dit l'épaisseur de la région *protoginique* du granite. Sur le parallèle de Ponte-Leccia, la traversée Est-Ouest de la *protogine* est

(1) *Comptes rendus* 147, 1908, p. 206-208.

d'à peu près 8^{km}; plus au Nord, dans la chaîne du Tenda, elle varie de 5 à 10^{km}; elle est de 10^{km} sur le parallèle de Popolasca, un peu moindre sur le parallèle de Corte; elle augmente rapidement à partir du parallèle de Vivario jusqu'à atteindre, sur le parallèle de Bocognano, l'invraisemblable valeur de 24^{km}. Plus au Sud, la largeur se réduit beaucoup.

Vers Prunelli-di-Fiumorbo, la *protogine* n'a guère que 2^{km} de largeur de l'Est à l'Ouest; au delà de cette zone laminée, vers l'Ouest, le granite est à peu près normal sur 8^{km} de largeur; mais une autre bande de protogine, large de 3^{km} au moins, passe à la Foce di Verde, bande qui conflue dans le Nord avec la première, tandis qu'elle s'effile rapidement et disparaît au Sud. Il semble que, dans le sud-est de la Corse, le granite ait été protégé contre l'écrasement et le laminage par l'épais coussinet que formaient, au-dessus de lui et sous les Schistes Lustrés, les arkoses de l'Abatesco et le Flysch nummulitique.

Mylonites d'autres roches. — Les *roches vertes* associées aux Schistes Lustrés et la radiolarite qui les accompagne sont très souvent mylonitisées : la serpentine donne ainsi des schistes verts ou noirs, où l'on trouve parfois du glaucophane, de la néphrite ou de l'asbeste; la radiolarite donne des schistes rouges. Ces mylonites sont naturellement plus atteintes par la métasomatose que les roches non écrasées, et on les voit transformées en des sortes de boues ou de terres vertes, noires ou rouges (routes des cols d'Ominanda et de San-Quilico, près de Corte; environs de Morosaglia et de Ponte-Leccia, etc.).

Brèches tectoniques. — Mais les phénomènes d'écrasement ont eu, en maint endroit, une ampleur bien plus grande; ils ont produit alors des brèches tectoniques (*Reibungsbrekzien* des géologues allemands).

Telle est la brèche sur laquelle repose et dans laquelle s'enveloppe le calcaire tithonique de Caporalino : brèche qui est un mélange de blocs et de débris de ce calcaire et d'une mylonite faite aux dépens des *cornéennes* ou *roches brunes*.

Cette brèche est commodément observable dans les tranchées du chemin de fer près de la station Omessa. Les blocs de calcaire ont toute dimension, jusqu'à plusieurs mètres; les uns ont gardé des angles vifs; les autres sont arrondis par le frottement au point de ressembler à des galets. Dans la mylonite, les *roches brunes* sont elles-mêmes brisées et concassées de toutes les manières imaginables. La grande lentille calcaire, faite de bancs verticaux et épaisse au maximum de 400^{m}, s'amenuise au Sud, puis s'égrène, et se poursuit, dans les *roches brunes*, sous la forme d'une brèche

où les éléments calcaires se raréfient de plus en plus, jusqu'à disparaître. A Francardo, sur la rive droite du Golo, la bande calcaire qui prolonge la lentille de Caporalino vient au contact du granite, traversé lui-même par du microgranite : près de ce contact mécanique, le calcaire renferme des débris de microgranite, de granite ou d'autres roches siliceuses, enrobés dans de la calcite, et l'on croirait voir un conglomérat.

Aux environs de Corte (Razzo Bianco près de Venaco, Valletto, carrière de marbre de la Restonica, gisement de marbre au fond de la vallée à l'est de Castiglione), tous les gisements de *marbre cipolin* liés au complexe des *cornéennes* ou des *roches brunes* montrent des brèches analogues, qui sont sûrement des brèches tectoniques : le marbre contient des débris, souvent anguleux, de cornéenne verte, de microgranite ou de granite; mais ce mélange n'existe qu'au voisinage du contact du marbre et des roches siliceuses. La brèche tectonique est elle-même laminée; le marbre est traversé par de multiples fissures cicatrisées en calcite fibreuse.

La plus curieuse de ces brèches tectoniques est celle qui affleure autour de la halte Vecchio du chemin de fer Corte-Ajaccio, en plein pays de *protogine*. Les auteurs de la feuille *Corte* de la Carte géologique l'ont interprétée comme un conglomérat et assimilée au *poudingue de Venaco* qui est lui-même, probablement, d'âge tertiaire. Le fait est que, sur beaucoup de points, la ressemblance avec un poudingue sédimentaire est grande. Des débris et des blocs de *protogine*, d'aplite, de microgranite, de quartz blanc, enfin de cipolin blanc ou gris, sont cimentés par une mylonite granitique grossière, chloriteuse, simulant l'arkose. Les blocs et débris calcaires sont assez rares; quelques-uns ont l'air de galets; mais d'autres sont anguleux, pointus, effilés comme des lames, fragmentés par le laminage postérieur à un premier écrasement. Ils sont faits d'un cipolin identique aux autres cipolins de la région de Corte; on y voit les mêmes zones de calcite fibreuse cicatrisant d'anciennes fentes. La brèche de Vecchio se sépare mal de la *protogine* ambiante. Elle est, pour nous, dans cette protogine, un espace où le broyage a été au paroxysme, espace qui s'allonge du Sud-Sud-Est au Nord-Nord-Ouest, parallèlement au bord commun à la *protogine* et aux Schistes Lustrés. Cet espace, avant broyage, contenait un lambeau de cipolin, d'âge primaire, que le broyage a divisé et dispersé dans la mylonite générale.

Nous citerons encore, près de Macinaggio, au point où la route de Tomino se détache de la route du Cap Corse, deux grandes lentilles, l'une de Verrucano vert, l'autre de calcaire du Trias, chacune plus grosse qu'un

mètre cube, noyées dans un terrain gréseux jaune qui ne peut être que nummulitique. On est ici dans l'*écaille* de terrains non métamorphiques *posée sur* la nappe des Schistes Lustrés, écaille qui montre, près de là, à sa base, un peu de mylonite granitique (dernière maison Sud de Macinaggio).

PHYSIQUE INDUSTRIELLE. — *Sur l'extraction de l'énergie des mers.* Note [1] de M. **Georges Claude.**

L'Académie se rappelle les propositions qu'avec M. Paul Boucherot, j'ai eu l'honneur de présenter relativement à l'extraction de l'énergie des mers tropicales [2].

J'ai le plaisir d'annoncer qu'on a pu démarrer hier, dans de bonnes conditions, l'installation d'essai établie près de Liége, avec le concours de la Société d'Ougrée Marihaye.

La turbine de 50 kilowatts, construite par la *Société alsacienne de Constructions mécaniques*, a pu déjà marcher en fournissant entre les températures de 35° et 15° une puissance de 40 kilowatts, bien supérieure à celle exigée par le pompage de l'eau et l'extraction des gaz dissous.

Je me propose de revenir ultérieurement sur cette question, n'ayant pas encore à ma disposition les renseignements nécessaires.

ÉLASTICITÉ. — *Sur les équations intrinsèques des surfaces élastiques à trois paramètres.* Note de M. **Louis Roy.**

Nous avons appelé équations *intrinsèques* de la surface élastique à trois paramètres [3] celles qu'on obtient en prenant comme axes de projections, non plus les axes fixes $Oxyz$, mais les axes locaux $Muvw$. Soient donc $\mathfrak{X}_e$, $\mathfrak{Y}_e$, $\mathfrak{Z}_e$; $\mathfrak{L}_e$, $\mathfrak{M}_e$, $\mathfrak{N}_e$ les composantes suivant ces axes de la force et du couple extérieurs en M par unité de surface comptée sur l'état primitif; $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, ..., $\mathfrak{N}_i$ les composantes analogues relatives aux forces d'inertie; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, ..., $\mathfrak{N}$ les composantes de la force et du couple extérieurs en un point du bord de la surface et par unité de longueur du contour primitif.

---

(1) Séance du 30 avril 1928.

(2) *Comptes rendus*, 183, 1926, p. 929, et 185, 1927, p. 987.

(3) L. Roy, *Sur les équations des surfaces élastiques à trois paramètres* (*Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1081).

Si l'on observe que les composantes $\mathcal{N}_e$, $\mathcal{N}_i$, $\mathcal{N}$ sont nulles, du fait que $M\omega$ est ici dirigé suivant l'axe du tronçon ou de l'élément de bord correspondants et si l'on pose

$$\mathfrak{L}' = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i + \sum\left(-\frac{\partial \mathcal{C}_u}{\partial \omega} + r\mathcal{C}_v - q\mathcal{C}_w\right),$$

$$\mathfrak{M}' = \mathcal{M}_e + \mathcal{M}_i + \sum\left(-\frac{\partial \mathcal{C}_v}{\partial \omega} + p\mathcal{C}_w - r\mathcal{C}_u\right),$$

$$\mathfrak{N}' = \sum\left(-\frac{\partial \mathcal{C}_w}{\partial \omega} + q\mathcal{C}_u - p\mathcal{C}_v\right) + \mathcal{R}_{1u},$$

on obtient comme équations intrinsèques les trois équations indéfinies

$$\mathcal{X}_e + \mathcal{X}_i - \frac{\partial \mathcal{R}_u}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{R}_{1u}}{\partial \omega_1} + r_1\mathcal{R}_{1v} - q_1\mathfrak{L}' + q\mathfrak{M}' + r\mathfrak{N}' = 0,$$

$$\mathcal{Y}_e + \mathcal{Y}_i - \frac{\partial \mathfrak{N}'}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathcal{R}_{1v}}{\partial \omega_1} - r\,\mathcal{R}_u - r_1\mathcal{R}_{1u} + p_1\mathfrak{L}' - p\mathfrak{M}' = 0,$$

$$\mathcal{Z}_e + \mathcal{Z}_i + \frac{\partial \mathfrak{M}'}{\partial \omega} - \frac{\partial \mathfrak{L}'}{\partial \omega_1} + q\mathcal{R}_u + q_1\mathcal{R}_{1u} - p_1\mathcal{R}_{1v} - p\mathfrak{N}' = 0,$$

et les cinq conditions aux limites

$$\mathcal{X} - q_1\mathcal{L} + q\mathcal{M} + a(\mathcal{R}_u - q_1\mathcal{C}_u + q\mathcal{C}_v + r\mathcal{C}_w) + b(\mathcal{R}_{1u} - q_1\mathcal{C}_{1u} + q\mathcal{C}_{1v} + r\mathcal{C}_{1w}) = 0,$$

$$\mathcal{Y} + p_1\mathcal{L} - p\mathcal{M} + a(\mathfrak{N}' + p_1\mathcal{C}_u - p\mathcal{C}_v) + b(\mathcal{R}_{1v} + p_1\mathcal{C}_{1u} - p\mathcal{C}_{1v}) = 0,$$

$$\mathcal{Z} - a\mathfrak{M}' + b\mathfrak{L}' + \frac{\partial}{\partial l}[a(\mathcal{L} + a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{1u}) + b(\mathcal{M} + a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{1v})] = 0,$$

$$a(\mathcal{M} + a\mathcal{C}_v + b\mathcal{C}_{1v}) - b(\mathcal{L} + a\mathcal{C}_u + b\mathcal{C}_{1u}) = 0, \qquad a\mathcal{C}_w + b\mathcal{C}_{1w} = 0,$$

$\frac{\partial}{\partial l}$ désignant la dérivée suivant la tangente $(b, -a)$ au contour de l'image de S dans le plan $\varpi O \omega_1$. Les deux dernières conditions coïncident d'ailleurs avec les deux dernières de notre précédente Note [1].

Les forces d'inertie conservent les mêmes expressions

$$\mathcal{X}_i = -\rho\left|\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|, \qquad \mathcal{Y}_i = -\rho\left|\alpha_1\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|, \qquad \mathcal{Z}_i = -\rho\left|\alpha_2\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|$$

---

[1] Par suite d'une erreur de transcription, les trois premières conditions aux limites que nous avons données dans cette Note (p. 1083) sont incomplètes; il faut ajouter respectivement à chacun de leurs premiers membres les termes

$$\frac{\partial}{\partial l}[a\alpha_2|\alpha L'| + b(\beta N' - \gamma M')], \quad \frac{\partial}{\partial l}[a\beta_2|\alpha L'| + b(\gamma L' - \alpha N')],$$

$$\frac{\partial}{\partial l}[a\gamma_2|\alpha L'| + b(\alpha M' - \beta L')].$$

que pour la surface à six paramètres, ρ désignant la densité superficielle comptée sur l'état primitif; mais les couples d'inertie $\mathcal{L}_i$, $\mathfrak{M}_i$ se simplifient beaucoup du fait que $\mathrm{M}w$ est maintenant dirigé suivant l'axe du tronçon et l'on trouve

$$\mathcal{L}_i = -\rho\frac{e^2}{12}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} - \mathrm{QR}\right), \qquad \mathfrak{M}_i = -\rho\frac{e^2}{12}\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial t} + \mathrm{RP}\right),$$

e étant l'épaisseur de la surface, et

$$\mathrm{P} = \left|\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right|, \qquad \mathrm{Q} = \left|\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right|, \qquad \mathrm{R} = \left|\alpha_1 \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right|$$

les composantes suivant les axes $\mathrm{M}uvw$ de la rotation instantanée du tronçon, c'est-à-dire du trièdre (M).

Il résulte d'autre part du choix de ce trièdre et des approximations faites que les rotations par unité de longueur r, r_1 sont négligeables et, par suite, n'interviennent pas dans les expressions du potentiel thermodynamique interne et de la fonction dissipative. Les composantes $\mathcal{C}_w$, $\mathcal{C}_{1w}$ des couples par unité de longueur $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$ sont alors nulles, de sorte que la cinquième condition aux limites disparaît. Qu'il s'agisse des équations rapportées aux axes fixes ou des équations intrinsèques, il ne subsiste donc en définitive que quatre conditions aux limites. On reconnaît enfin, dans la troisième de ces conditions appliquée au cas particulier des plaques, celle par laquelle Kirchhoff a autrefois fusionné deux des trois conditions de Poisson relatives au mouvement transversal et que M. Boussinesq a justifiée plus tard d'une manière directe.

ALGOLOGIE. — *Sur la question du* Tilopteris Mertensii *Kütz.* Note (1) de M. C. SAUVAGEAU.

Le *Tilopteris Mertensii* est énigmatique à divers points de vue. Ses organes de reproduction sont des anthéridies, parfois très rares, et de grosses monospores, toujours très communes; la plupart des auteurs considèrent celles-ci comme des oosphères, bien qu'elles germent sans que jamais on ait vu d'anthérozoïde y pénétrer, et l'expérience démontre d'ailleurs facilement qu'elles germent sans leur concours. A cause de la structure largement

(1) Séance du 30 avril 1928.

spumeuse des monospores et des variations de leur diamètre, je les ai comparées naguère ([1]) aux propagules de l'*Acinetospora pusilla*.

Cette Algue de basse mer est essentiellement éphémère. A Cherbourg, sa localité classique où Thuret, Bornet, Guignard l'ont étudiée, on la rencontre seulement en avril; à Wimereux, où sa croissance est plus lente, elle paraît vivre pendant au moins deux mois. On ignore complètement sous quelle forme elle passe le reste de l'année.

J'ai utilisé un envoi de Cherbourg, reçu le 20 avril 1927 de M. Corbière et de Mlle Doublet, et un envoi de Wimereux, récolté le 31 mai par MM. Hamel et Leblond. Les résultats concordent avec ceux que j'avais obtenus en 1919; ceux-ci étaient toutefois moins complets à cause d'un accident survenu en fin d'expérience.

De même que Guignard, j'ai toujours vu les monospores nues et uninucléées; leur diamètre variait de 55^{μ} à 82^{μ}. Elles germent, sur place ou après déhiscence, dès qu'elles sont revêtues d'une membrane. La première division nucléaire ne s'y effectue qu'au moment de l'apparition du rhizoïde, lequel précède toujours le filament dressé. Dans la nature et dans les cultures, elles produisent rapidement des plantules parfaitement concordantes entre elles et avec celles dont Bornet n'a fait connaître que le tout premier état. En disséquant de vieux individus, j'ai trouvé des plantules de germination accrochées par leur rhizoïde; les plus longs filaments dressés mesuraient 3^{mm}. Les tout premiers rameaux sont isolés; les rameaux suivants sont opposés distiques; cette double disposition se retrouve d'ailleurs à la base des individus adultes. Pendant ce temps, l'ancienne monospore se cloisonne et s'élargit; elle constituera vraisemblablement un organe durable d'où s'élèveront de nouveaux filaments dressés. Les plantules que j'obtins en cultures, grâce aux exemplaires reçus le 20 avril, commencèrent à dépérir vers la fin de mai; néanmoins, des portions de filaments se maintinrent et, à partir de la fin de décembre, se comportèrent comme je vais dire pour les filaments conservés de la plante adulte.

Les filaments d'une touffe entière et propre déposée dans un vase de culture dépérirent peu à peu, la destruction commençant par les plus jeunes. Hormis quelques cellules éparses, dont le contenu légèrement contracté et très coloré s'entoura d'une nouvelle membrane, toutes les parties monosiphoniées moururent. Beaucoup de cellules des parties

---

([1]) *Les* Acinetospora *et la sexualité des Tiloptéridacées* (*Journ. de Botanique*, 13, 1899, p. 107).

polysiphoniées moururent aussi, tandis que les autres, isolées ou groupées, fonçaient leurs chromatophores, devenaient des sortes d'hypnocystes fortuits; certaines de celles-ci produisirent lentement une protubérance paucicellulaire dont parfois certains éléments se désarticulaient, tombaient au fond du vase, mouraient ou devenaient aussi des hypnocystes.

Le 13 novembre, cette touffe paraissait encore vouée à une destruction progressive; néanmoins, l'expérience de 1919 m'engageait à n'en pas désespérer. En effet, quand je revis la culture le 30 décembre, son aspect était entièrement changé. Il s'en élevait une forêt de jeunes et vigoureux filaments dressés, doués d'un intense phototropisme positif, bien caractérisés comme *Tilopteris*, la plupart encore simples, d'autres déjà pourvus de quelques rameaux; leur nombre augmenta progressivement dans la suite, chaque cellule encore vivante pouvant se comporter comme une bouture. Ainsi, après une longue période de sommeil, un renouveau de végétation s'était manifesté en hiver; il aboutissait à la formation de jeunes individus identiques à ceux qui proviennent des monospores. Une différence est cependant à signaler : au lieu de prendre tout de suite une forme conique comme ceux-ci, et de s'allonger par un accroissement intercalaire, le jeune filament dressé est d'abord cylindrique, s'allonge par accroissement nettement terminal, atteint ainsi parfois plusieurs millimètres, et ses cellules sont simples ou divisées suivant la longueur; puis, la longue cellule terminale s'atténue, produit plusieurs cloisons transversales rapprochées, et ceci est le début de l'accroissement intercalaire qui se maintiendra par la suite. Le 11 avril, les plus longs de ces filaments atteignaient près de 3^{cm}; tous leurs rameaux étaient grêles, courts et stériles, ce qui est attribuable à la vie en milieu confiné; si des organes reproducteurs s'étaient formés, ils auraient été évidemment identiques à ceux des individus adultes. Toutes les plantules que j'ai observées dans la nature étaient stériles, peut-être à cause de leur trop jeune âge, peut-être aussi parce que la brève saison du *Tilopteris* passe avant qu'elles soient en état de fructifier. Malgré cette lacune dans mon étude, on admettra qu'elles persistent jusqu'à l'année suivante, soit par l'ancienne monospore devenue plus ou moins tuberculiforme, soit par quelques-unes de leurs cellules transformées en hypnocystes.

Cette reprise de végétation du *Tilopteris*, constatée en 1919 et 1928, est si générale, et se manifeste avec une telle intensité, qu'elle ne peut être accidentelle; le phénomène se produisant quand l'expérience est faite avec des individus adultes, ou avec des plantules de germination, est vraisem-

blablement aussi le même dans la nature, et contribue à expliquer pourquoi la plante se rencontre généralement en touffes.

L'évolution individuelle de cette algue archaïque s'explique donc parfaitement, tout au moins sur les côtes françaises, sans supposer ni alternance de générations (Kylin, 1917), ni prothalle (Nienburg, *Haplospora*, 1923), ni pléthysmothalle, ni protonéma. Tout semble indiquer qu'elle se maintient et se multiplie simplement par bouturage naturel. Si ses monospores furent jadis des oosphères, elles se comportent actuellement comme des propagules.

Formulée pour la plante française, cette conclusion vaut sans doute aussi pour celle qui est commune à Helgoland d'avril jusqu'au début de juillet; Kuckuck l'a récoltée maintes fois et toujours pourvue de monospores uninucléées, nues et non attractives des anthérozoïdes; les monospores plurinucléées décrites par Reinke, d'après une unique récolte faite en juin, s'expliquent par une germination exceptionnelle, interne et précoce. Enfin les termes dans lesquels Reinke décrit les touffes d'*Haplospora* et de *Scaphospora* de la Baltique laissent supposer que leur mode de végétation est comparable à celui du *Tilopteris*.

M. A. Lacroix fait hommage à l'Académie du *Discours* prononcé à la séance générale d'ouverture du Congrès du *Cinquantenaire de l'Association française pour l'Avancement des Sciences*.

M. L. Joubin fait hommage à l'Académie du fascicule 3 de la *Faune et Flore de la Méditerranée*, dont il est directeur.

ÉLECTIONS.

L'Académie procède, par la voie du scrutin, à l'élection d'un Membre de la Section d'Anatomie et Zoologie, en remplacement de M. *F. Henneguy* décédé.

Au premier tour de scrutin, le nombre de votants étant 59,

M. Maurice Caullery	obtient	....	25 suffrages
M. Louis Roule	»	....	16 »
M. Louis Lapicque	»	....	15 »
M. Edmond Retterer	»	....	3 »

Au second tour de scrutin, le nombre de votants étant 60,

M. Maurice Caullery	obtient	....	34 suffrages
M. Louis Roule	»	....	16 »
M. Louis Lapicque	»	....	10 »

M. **Maurice Caullery**, ayant réuni la majorité absolue des suffrages, est proclamé élu.

Son élection sera soumise à l'approbation de M. le Président de la République.

NOMINATIONS.

MM. **A. Lecornu**, **M. de Broglie** et **Alexandre Bigot** sont délégués pour représenter l'Académie à l'inauguration d'une plaque commémorative qui sera apposée sur la maison jadis habitée à Mathieu (Calvados) par *Augustin Fresnel* et sa famille.

CORRESPONDANCE.

M. **Louis Lapicque** prie l'Académie de vouloir bien le compter au nombre des candidats à la place vacante dans la Section d'Anatomie et Zoologie par le décès de M. *F. Henneguy*.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *American Philosophical Society Bicentenary Celebration*, 1927.

2° J. Fr. Schroeter. *Sonnenfinsternisse von* 600 *bis* 1800 *N. Chr.*

3° B. Sancholle-Henraux. *Marbres, pierres, grès, granits de France.*

4° *Cours de Mécanique professé à l'École supérieure des Mines*, par Paul Lévy. (Présenté par M. Hadamard.)

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur la seconde forme fondamentale II : Généralisation du théorème d'Enneper.* Note [1] de M. V. **Hlavatý**.

Imaginons une variété V^*_{n-1} (= variété riemannienne à $n-1$ dimensions avec torsion) dans une V^*_n et sur V^*_{n-1} une courbe asymptotique A_m d'ordre $m(>1)$, celle-ci étant définie comme suit : « Le m-vecteur osculateur [2] de A_m est situé le long de A_m dans V^*_{n-1}. » Nous nous proposons dans cette Note d'appliquer sur A_m le théorème d'Enneper.

1. Remarquons avant tout que, pour une courbe arbitraire au verseur tangent $\underset{1}{i}^\nu$ sont valables les formules de Frenet

$$\underset{1}{i}^\lambda \nabla_\lambda \underset{j}{i}^\nu = -\underset{j-1}{k}\ \underset{j-1}{i}^\nu + \underset{j}{k}\ \underset{j+1}{i}^\nu \qquad (k_0 = k_n = 0,\ j = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

où $\underset{1}{i}^\nu, \ldots, \underset{n}{i}^\nu$ sont les verseurs normaux successifs et $\underset{1}{k}, \ldots, \underset{n-1}{k}$ les courbures de la courbe en question. D'autre part, en désignant par n^ν le verseur normal à V^*_{n-1} et par $g'_{\lambda\mu}$ son tenseur métrique, la seconde forme fondamentale $h_{\lambda\mu}$ est définie comme suit :

$$h_{\lambda\mu} = g'^{\alpha}_{\lambda} g'^{\beta}_{\mu} \nabla_\alpha n_\beta.$$

Si l'on désigne par $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ l'affineur de torsion $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{2}(\Gamma^\nu_{\lambda\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\lambda})$, on trouve

$$2 g'^{\alpha}_{\omega} g'^{\beta}_{\mu} S_{\beta\alpha}^{\cdot\cdot\nu} n_\nu = h_{\mu\omega} - h_{\omega\mu} \quad [3]. \tag{2}$$

2. D'après la définition de A_m, on peut exprimer n^ν au moyen des verseurs $\underset{f}{i}^\nu$ $(f = m+1, \ldots, n)$

$$n^\nu = \sum_{m+1}^{n} \cos \underset{f}{a}\ \underset{f}{i}^\nu.$$

---

[1] Séance du 30 avril 1928.

[2] C'est-à-dire le m-vecteur, contenant le verseur tangent $\underset{1}{i}^\nu$ et les verseurs normaux successifs $\underset{2}{i}^\nu, \ldots, \underset{m}{i}^\nu$ de A_m.

[3] Cf. V. Hlavatý, *Contribution au calcul différentiel absolu* (*Věstnik Kr. Č. Společnosti nauk*, Prague, 2, 1926, p. 1-12). Pour le cas d'une variété sans torsion, voir Schouten, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, 1924, p. 167 et 213.

d'où il suit en particulier pour $h_{\lambda\mu}$

$$h_{\lambda\mu} = g'^{\alpha}_{\lambda} g'^{\beta}_{\mu} \left\{ \sum_{m+1}^{n}{}_{f} \left(\nabla_{\alpha} \cos \underset{f}{\alpha} \right) \underset{f}{i_\beta} + \sum_{m+1}^{n}{}_{f} \cos \underset{f}{\alpha} \nabla_{\alpha} \underset{f}{i_\beta} \right\}.$$

Or, en désignant par h_{ab} le scalaire $\underset{a}{i^\lambda} \underset{b}{i^\mu} h_{\lambda\mu}$, on obtient, d'après (1) (pour $u = 1, \ldots, m-1$),

$$(3) \qquad h_{1u} = 0, \qquad h_{1m} = -\underset{m}{k} \cos \underset{m+1}{\alpha},$$

d'où il suit en particulier, en raison de (2),

$$(4) \qquad -h_{u1} = 2 S_{1u}^{\cdot\cdot n} = 2 \underset{1}{i^\omega} \underset{u}{i^\mu} S_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\nu} n_\nu, \qquad h_{m1} = 2 S_{m1}^{\cdot\cdot n} - \underset{m}{k} \cos \underset{m+1}{\alpha}.$$

D'autre part, en introduisant « les affineurs de Riemann-Christoffel » pour $V_n^\star$ et $V_{n-1}^\star$, c'est-à-dire $K_{\omega\mu\lambda\nu}$, $K'_{\omega\mu\lambda\nu}$, on peut définir les courbures K_{1a1a}, K'_{1a1a} de $V_n^\star$ et $V_{n-1}^\star$ dans la bidirection des verseurs $\underset{1}{i^\nu}$, $\underset{a}{i^\nu}$

$$K_{1a1a} = \underset{1}{i^\omega} \underset{1}{i^\lambda} \underset{a}{i^\mu} \underset{a}{i^\nu} K_{\omega\mu\lambda\nu}, \qquad K'_{1a1a} = \underset{1}{i^\omega} \underset{1}{i^\lambda} \underset{a}{i^\mu} \underset{a}{i^\nu} K'_{\omega\mu\lambda\nu}.$$

Or, en tenant compte de l'équation de Gauss (généralisée), on en déduit

$$K_{1a1a} - K'_{1a1a} = -(h_{11} h_{aa} - h_{a1} h_{1a}) = h_{1a} h_{a1} \qquad (a = 1, \ldots, m)$$

et, par conséquent,

$$(5) \qquad \boxed{\sum_{1}^{m}{}_{a} (K_{1a1a} - K'_{1a1a}) = + \left(\underset{m}{k} \cos \underset{m+1}{\alpha} \right)^2 + 2 S_{1m}^{\cdot\cdot n} \underset{m}{k} \cos \underset{m+1}{\alpha}}$$

et cette formule nous présente la généralisation d'un théorème bien connu d'Enneper.

Si la connexion est sans torsion, on a $S_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0$ et, par conséquent,

$$\sum_{1}^{m}{}_{a} (K_{1a1a} - K'_{1a1a}) = \left(\underset{m}{k} \cos \underset{m+1}{\alpha} \right)^2.$$

Si $m = n - 1$, c'est-à-dire si la courbe asymptotique est d'ordre $n - 1$, le scalaire $-\sum_{1}^{m}{}_{a} K'_{1a1a} = K'_{11}$ est la mesure de courbure de $V_{n-1}^\star$ dans

la direction de $\underset{1}{i}^{\gamma}$, et la formule (5) devient donc

$$(5)' \qquad \sum_{1}^{n-1} {}_{a} \mathrm{K}_{1a1a} + \mathrm{K}'_{11} = \underset{n\ 1}{k^2} + 2\mathrm{S}_{1n-1}^{\cdot\cdot n} \underset{n-1}{k}$$

Si $n = 3$, on a $m = n - 1 = 2$. Le scalaire $\sum_{1}^{m} {}_{a} \mathrm{K}_{1a1a} = \mathrm{K}_{1212}$ est la courbure forcée $\mathrm{K}_{(f)}$ de V_3^* dans la bidirection tangente de V_2^* et $\mathrm{K}'_0 = \mathrm{K}'_{1212}$ est la courbure moyenne absolue de V_2^*. On trouve donc

$$(5)'' \qquad \mathrm{K}_{(f)} - \mathrm{K}'_0 = \underset{2}{k^2} + 2\mathrm{S}_{12}^{\cdot\cdot 3} \underset{2}{k}.$$

Si en particulier $\mathrm{S}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0$ et V_3^* devient R^3 (= espace euclidien), cette formule prend la forme bien connue correspondant au théorème d'Enneper.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les droites de Julia des fonctions entières.* Note de M. **Miécislas Biernacki**, présentée par M. Hadamard.

$f(z)$ étant une fonction entière ou méromorphe, nous dirons qu'une demi-droite issue de l'origine est une droite de Julia ou une droite $(\mathfrak{J})$ si, z_0 étant l'affixe d'un point de cette demi-droite ($z_0 \neq 0$), la famille $f(tz_0)$ où $t \geq 1$ n'est pas normale. Dans un angle de sommet origine et d'ouverture arbitrairement petite contenant la droite $(\mathfrak{J})$ à son intérieur, $f(z)$ prend ∞ fois toute valeur, sauf deux au plus. Si $f(z)$ y devient en outre égale ∞ fois à une fraction rationnelle $\mathrm{R}(z)$ quelconque, sauf pour deux fractions au plus [une seule si $f(z)$ est entière] la droite $(\mathfrak{J})$ sera dite droite $(\overset{*}{\mathfrak{J}})$.

Théorème I (¹). — *Toute fonction entière possède une droite* $(\overset{*}{\mathfrak{J}})$.

On peut trouver deux suites de points s'éloignant à l'infini d'affixes z_1, z_2, ..., z_n, ... et t_1, t_2, ..., t_n, ..., tels que

$$|t_n| = |z_n|, \qquad \lim_{n=\infty} \arg(z_n) = \Theta_1, \qquad \lim_{n=\infty} \arg(t_n) = \Theta_2$$

et qu'en outre $|f(z_n)| = |z_n|^n$, $|f(z)| \geq |z_n|^n$ sur l'arc de $|z| = |z_n|$ où $\arg z_n \leq \arg z \leq \arg t_n$, $|f(t_n)| = |t_n|^{n^2}$. Il résulte d'un théorème récent de

(¹) Ce théorème n'est pas nouveau; M. Valiron a en effet remarqué qu'il se déduit de la théorie des cercles de remplissage de M. Milloux. Cependant la démonstration simple et directe que nous exposons semble présenter un certain intérêt. D'ailleurs les raisonnements analogues ont été déjà employés par MM. Mandelbrojt et Gontscharoff.

M. Mandelbrojt [1] que l'angle $\Theta_1 \leqq \arg z \leqq \Theta_2$ contient une droite $(\mathcal{J})$ commune à toutes les fonctions de la forme $R_1(z) f(z) + R_2(z)$ [$R_1(z)$ et $R_2(z)$ sont des fractions rationnelles]. La considération de l'expression $\dfrac{f(z) - R_1(z)}{R_2(z) - R_1(z)}$ achève la démonstration.

Théorème II [2]. — *Soient $f(z)$ une fonction méromorphe (ou entière) et z_1, z_2, ..., z_n, ... les affixes d'une suite de points s'éloignant à l'infini et tels que $\lim_{n=\infty} \arg z_n = \Theta$. Supposons qu'il existe un nombre fixe S $(0 < S < 1)$ et deux fractions rationnelles $R_1(z)$ et $R_2(z)$ $[R_1(z) \not\equiv R_2(z)]$ telles qu'un cercle C_n de centre d'affixe z_n et de rayon $|z_n|^S$ contienne :*

1° *Une racine au moins de l'équation $f(z) - R_1(z) = 0$ dès que $n > n_0$;*

2° *Un nombre, croissant indéfiniment avec n, de racines de l'équation $f(z) - R_2(z) = 0$.*

Alors l'angle arbitrairement petit ayant comme bissectrice la demi-droite d'argument Θ contient ∞ racines des équations $f(z) - R(z) = 0$, sauf pour deux fractions $R(z)$ au plus [une seule si $f(z)$ est entière].

La démonstration repose sur l'inégalité de Jensen ; elle s'achève comme dans le cas du théorème I.

Le théorème II montre immédiatement qu'un théorème considéré comme probable par M. Valiron [3] est exact.

Théorème III. — *$f(z)$ étant entière d'ordre positif il existe une demi-droite issue de l'origine telle que $\theta(z)$ désignant l'une quelconque des fonctions*

$$(1) \qquad \ldots,\quad f''(z),\quad f'(z),\quad f(z),\quad \int_0^z f(z)\,dz,\quad \int_0^z dz \int_0^z f(z)\,dz,\quad \ldots,$$

et $P(z)$ un polynome, un angle de sommet origine et d'ouverture arbitrairement petite contenant la demi-droite considérée à son intérieur, contient une infinité de racines de toutes les équations de la forme

$$\theta(z) - P(z) = 0,$$

sauf au plus pour un seul polynome pour chaque fonction $\theta(z)$.

Dans le cas de *l'ordre infini* il suffit de remarquer avec MM. Bieber-

---

[1] *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 1098.

[2] M. Mandelbrojt a énoncé un théorème qui présente quelques analogies avec le théorème II [*Journal de Mathématiques pures et appliquées* (sous presse)].

[3] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 48, 1924, p. 264.

bach (¹) et Valiron (²) qu'une fonction entière d'ordre infini dans un angle y prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus; on peut aussi remarquer que $\varlimsup_{r=\infty} \frac{\log M(e^{2H} r)}{\log M(r)} = \infty$ même si r ne prend pas les valeurs remplissant les intervalles d'étendue totale logarithmique inférieure à H et utiliser les résultats de la théorie de MM. Wiman et Valiron (³) et le théorème de M. Mandelbrojt déjà cité. La deuxième méthode permet de montrer qu'étant donnée une suite finie quelconque de fonctions extraite de la suite (1) il existe une suite infinie de cercles de centres d'affixes z_n où $|f(z)|$ est maximum pour $|z| = |z_n|$, de rayons $\varepsilon |z_n|$ (ε est un nombre fixe mais arbitrairement petit) où chaque fonction de la suite devient égale à toute fraction $R(z)$ sauf une au plus, un nombre de fois qui croît indéfiniment avec n. Cette dernière propriété résulte de ce que les familles correspondantes ne peuvent pas être quasi normales.

J'ai établi le théorème III pour toutes les fonctions *d'ordre fini positif;* la démonstration est plus compliquée que dans le cas précédent.

Notons que *les propriétés exprimées par les théorèmes I et III ne sont nullement caractéristiques des droites* ($\mathcal{J}$) *en général*. Considérons la fonction entière $f(z) = \left[e^{ic_1 \int_{c_2}^{z} E_\alpha(-z)\,dz} - 1\right] z$. $E_\alpha(z)$ désigne la fonction connue de M. Mittag-Leffler ($0 < \alpha < 2$), c_1 et c_2 sont des constantes réelles convenables. L'axe positif est une droite ($\mathcal{J}$) pour $f(z)$. Cependant, dans un angle suffisamment petit contenant cet axe à son intérieur, $\frac{f(z)}{z}$ et $f'(z)$ sont bornées, tandis que $\int_0^z f(z)\,dz$ y tend uniformément vers l'infini avec $|z|$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Quelques théorèmes d'existence des intégrales des systèmes d'équations différentielles.* Note de M. **D.-V. Jonesco**, présentée par M. J. Hadamard.

1. Considérons le système de n équations différentielles du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t; x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(¹) *Mathematische Zeitschrift*, 3, 1919, p. 176.

(²) *Annales Éc. Norm.*, 3ᵉ série, 37, 1920, p. 253.

(³) Valiron, *Lectures of the general theory of integral functions*, p. 105.

où $f_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ sont des fonctions continues pour les valeurs de t comprises dans l'intervalle (a, b), et pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On suppose en outre que les fonctions $f_i(t; x_1, \ldots, x_n)$ satisfont à la condition de Lipschitz :

$$|f_i(t; x_1, \ldots, x_n) - f_i(t; x'_1, \ldots, x'_n)| < \sum_{k=1}^{n} A_{ik} |x_k - x'_k| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soient d'autre part $n-1$ points $t = t_2, \ldots, t = t_n$ pris dans l'intervalle (a, b), $(a = t_1, b = t_{n+1})$.

J'ai démontré le théorème suivant :

Si l'intervalle (a, b) est suffisamment petit, le système (1) admet une intégrale et une seule satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1(t_1) = 0, \\ x_2(t_2) = x_1(t_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n(t_n) = x_{n-1}(t_n), \\ \qquad 0 = x_n(t_{n+1}). \end{array}\right.$$

En désignant par H le plus grand des nombres $\sum_{k=1}^{n} A_{ik}$, une limite supérieure de l'intervalle (a, b), pour que le théorème soit possible, est $\frac{1}{2H}$.

2. Pour un système de deux équations différentielles du second ordre

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = f\left(t; x_1, x_2, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}\right), \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = g\left(t; x_1, x_2, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}\right); \end{array}\right.$$

où f et g satisfont aux conditions écrites plus haut, nous avons démontré le théorème suivant :

Lorsque l'intervalle (a, b) est suffisamment petit, il existe une intégrale et une seule du système (2) satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1(t_3) = x_2(t_3) \\ x'_1(t_3) = x'_2(t_3) \end{array}\right. \qquad [x_1(t_1) = 0;\ x_2(t_2) = 0],$$

t_3 étant un point donné de l'intervalle (t_1, t_2)

Ce théorème est compris dans le n° 1. Il est vrai pour un système d'équations en nombre quelconque et pour des conditions semblables aux conditions (3) en un ou plusieurs points de l'intervalle (t_1, t_2).

3. L'interprétation mécanique de ces considérations est la suivante :

Considérons deux systèmes matériels A et B, chacun d'eux dépendant de n paramètres. On suppose ce système soumis à l'action des forces dépendant des positions et des vitesses de tous les points du système A et B.

Le théorème du n° 2 démontre qu'il existe un mouvement du système A et B tel qu'à l'instant $t=t_1$ le système A occupe une position donnée, à l'instant $t=t_2$ le système B occupe une position également donnée et à l'instant $t=t_3$, les points des deux systèmes A et B coïncident respectivement ainsi que leurs vitesses.

4. Je fais encore remarquer que ces théorèmes ont bien d'autres applications à la physique mathématique.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *A propos d'une formule de MM. F. et R. Nevanlinna relative aux fonctions méromorphes dans un secteur.* Note de M. **Vladimir Bernstein**, présentée par M. Hadamard.

Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le domaine

$$\text{(D)} \qquad \rho \geq \rho_0, \qquad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2k} \qquad (x=\rho e^{i\varphi})$$

(frontière comprise) et soient A_1, A_2, ..., $A_n = a_n e^{i\alpha_n}$, ... et B_1, B_2, ..., $B_n = b_n e^{i\beta_n}$, ... respectivement les zéros et les pôles de $f(x)$ dans D ; supposons qu'aucun des points A_μ ou B_ν ne se trouve sur le contour de D. MM. F. et R. Nevanlinna ont démontré que, si l'on pose

$$\alpha(\rho) = \frac{k}{2}\int_{\rho_0}^{\rho}\left\{\log\left|f\left(te^{i\frac{\pi}{2k}}\right)\right| + \log\left|f\left(te^{-i\frac{\pi}{2k}}\right)\right|\right\}\frac{dt}{t},$$

$$m(\rho) = \frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}} \log|f(\rho e^{i\varphi})|\cos k\varphi \, d\varphi,$$

$$n(\rho) = \sum_{\rho_0 \leqq a_\mu < \rho} \cos k\alpha_\mu - \sum_{\rho_0 \leqq b_\nu < \rho} \cos k\beta_\nu,$$

l'expression

$$(1) \qquad P(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\alpha(z)}{z^{k+1}}dz + \frac{1}{\rho^k}\left\{\frac{m(\rho)}{k} + \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{m(z)}{z}dz\right\} - \pi\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{n(z)}{z^{k+1}}dz$$

tend vers une limite finie P_0 (qui ne dépend que de ρ_0) lorsque ρ croît indéfi-

niment [1]; ils en déduisent plusieurs théorèmes très remarquables sur les relations entre la croissance de $f(x)$ à l'intérieur de D, sa croissance sur le contour, et la distribution des points A_μ et B_ν. Or, le calcul même de MM. Nevanlinna montre que

$$(2) \qquad P(\rho) = P_0 - \frac{\rho_0 m'(\rho_0)}{k^2} \frac{1}{\rho^k}.$$

En comparant (1) et (2), on voit que $m(\rho)$ a des dérivées d'ordre quelconque en tout point qui n'est pas un point de discontinuité de $n(\rho)$; ces derniers points sont des points de discontinuité de première espèce pour les dérivées de $m(\rho)$. En égalant les dérivées premières de (1) et de (2), on trouve

$$(3) \qquad \rho m'(\rho) - k^2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{m(z)}{z} dz + k[\alpha(\rho) - \pi n(\rho)] = \rho_0 m'(\rho_0).$$

Cette formule permet de calculer le saut d'une dérivée quelconque de $m(\rho)$ en un point de discontinuité; en particulier on a

$$(4) \qquad m'(\rho+0) - m'(\rho-0) = \frac{\pi k}{\rho}[n(\rho+0) - n(\rho-0)].$$

Les formules (3) et (4) permettent d'obtenir les théorèmes suivants :

1° *Si l'on connaît $m(\rho)$, on peut calculer $\alpha(\rho)$ et $n(\rho)$.* En effet, en désignant par $\rho_1 < \rho_2 < \ldots$ les points de discontinuité de $m'(\rho)$, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} n(\rho) = \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \frac{\rho_\nu}{\pi k}[m'(\rho_\nu+0) - m'(\rho_\nu-0)] \quad \text{pour} \quad \rho_\mu < \rho \leqq \rho_{\mu+1} \quad (\mu = 1, 2, \ldots), \\ \alpha(\rho) = \pi n(\rho) - \dfrac{\rho m'(\rho) - \rho_0 m'(\rho_0)}{k} + k \displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{m(z)}{z} dz. \end{cases}$$

Si $m'(\rho)$ est continue, $n(\rho)$ est identiquement nulle.

2° *Si l'on connaît $\alpha(\rho)$ et $n(\rho)$, ou seulement la différence $\alpha(\rho) - \pi n(\rho)$, on a*

$$(6) \qquad m(\rho) = -\frac{k}{2} \int_{\rho_0}^{\rho} [\alpha(\xi) - \pi n(\xi)] \left[\left(\frac{\xi}{\rho}\right)^k - \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^k \right] \frac{d\xi}{\xi} + A\rho^k + B\rho^{-k},$$

A et B étant des constantes que l'on pourra déterminer si l'on connaît les valeurs initiales de $m(\rho)$ et de $m'(\rho)$.

---

(1) F. et R. Nevanlinna, *Ueber die Eigenschaften analytischer Functionen in der Umgebung einer singulären Linie oder Stelle* (*Acta Soc. scient. Fennicæ*, 50, v, p. 36).

Les formules (3), (4), (5) et (6) permettent de démontrer plusieurs théorèmes dans le genre de ceux que MM. Nevanlinna démontrent dans leur Mémoire cité. Nous n'en donnerons ici qu'un exemple. Soit $\omega(\xi)$ un ordre L, c'est-à-dire une fonction réelle, différentiable sauf en des points isolés, et telle que

$$\lim_{\xi=\infty}\omega(\xi)=\omega>0, \qquad \lim_{\xi=\infty}\omega'(\xi)\,\xi\log\xi=0.$$

Alors, *si* $\omega>k$, *et si* L *et* l *sont les limites d'indétermination du rapport* $\frac{\alpha(\xi)-\pi n(\xi)}{\xi^{\omega(\xi)}}$, *les limites d'indétermination du rapport* $\frac{m(\xi)}{\xi^{\omega(\xi)}}$ *sont comprises entre* $-\frac{k\omega}{\omega^2-k^2}l$ *et* $-\frac{k\omega}{\omega^2-k^2}$ L. On peut énoncer un théorème analogue pour $\omega\leq k$; toutefois, dans ce cas, il faut faire intervenir les valeurs initiales de $m(\rho)$ et $m'(\rho)$, sauf dans le cas $\omega=k$, si le rapport $\xi^{\omega(\xi)}:\xi^k$ tend vers l'infini avec ξ.

Les théorèmes de ce genre qu'on peut déduire des formules (5) et (6) sont extrêmement nombreux. Je me réserve de les traiter à une autre occasion. Notons toutefois que les formules (5) contiennent la dérivée $m'(\rho)$, de sorte que *la limitation de l'ordre de grandeur de* $m(\rho)$ *ne suffit pas pour pouvoir tirer des conclusions sur* $\alpha(\rho)$ *et* $n(\rho)$; *des suppositions sur* $m'(\rho)$ *sont nécessaires*. Au contraire, *une limitation de l'ordre de grandeur de* $\alpha(\rho)-\pi n(\rho)$ *suffit pour tirer des conclusions sur* $m(\rho)$ en vertu de la formule (6).

Il n'est pas nécessaire que $f(x)$ soit holomorphe sur le contour de D. Il suffirait par exemple que $\log|f(x)|$ soit continu et admette des dérivées partielles bornées sur chaque partie finie du contour. Les fonctions $m(\rho)$ et $\alpha(\rho)$ pourront dans ce cas n'avoir qu'un nombre fini de dérivées.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions régulièrement monotones.* Note [1] de M. **Serge Bernstein**, présentée par M. Hadamard.

1. Nous disons qu'une fonction $f(x)$ est *régulièrement monotone* dans l'intervalle (a, b), si aucune de ses dérivées successives ne change de signe dans cet intervalle [2]. Nous appellerons *type* de la fonction $f(x)$, dans

---

[1] Séance du 23 avril 1928.

[2] *Leçons sur les propriétés extrémales, etc.*, 1re Note, p. 196. J'ai démontré, à cet endroit, qu'une telle fonction est nécessairement analytique à l'intérieur de (a, b).

l'intervalle (a, b), la suite des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$, définis par

$$(1)\quad \begin{cases} f^{(i-1)}(x)\, f^{(i)}(x) \geqq 0, & \text{lorsque} \quad i \leqq \lambda_1, \\ f^{(i-1)}(x)\, f^{(i)}(x) \leqq 0, & \text{lorsque} \quad \lambda_1 < i \leqq \lambda_1 + \lambda_2 = \sigma_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (-1)^n f^{(i-1)}(x)\, f^{(i)}(x) \geqq 0, & \text{lorsque} \quad \sigma_n < i \leqq \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = \sigma_{n+1}; \end{cases}$$

en admettant, pour fixer les idées, que $f(x)\, f'(x) \geqq 0$; tous les *nombres typiques* λ_i sont des entiers *positifs* déterminés, à moins que $f(x)$ [ou $f(b-x)$] ne soit une fonction absolument monotone ou une intégrale d'ordre fini d'une telle fonction. Nous dirons que la dérivée $f^{(n)}(x)$ appartient à une *permanence* dans le cas où $f^{(n)}(x)\, f^{(n+1)}(x) \geqq 0$, c'est-à-dire si l'on a $\sigma_{2k} \leqq n < \sigma_{2k+1}$; dans le cas contraire où $f^{(n)}(x)\, f^{(n+1)}(x) < 0$, $f^{(n)}(x)$ appartiendra à une *alternance*. En posant

$$\mathrm{P}_{2k-1} = \mathrm{P}_{2k} = \lambda_1 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{2k-1}, \qquad \mathrm{Q}_{2k} = \mathrm{Q}_{2k+1} = \lambda_2 + \lambda_4 + \ldots + \lambda_{2k},$$

de sorte que $\mathrm{P}_m + \mathrm{Q}_m = \sigma_m$, quel que soit m, on établit l'inégalité

$$(2)\qquad |f^{(\sigma_m)}(x)| < \frac{\lambda_1!\,\lambda_2!\,\ldots\,\lambda_m!}{(x-a)^{\mathrm{P}_m}(b-x)^{\mathrm{Q}_m}}\,|f(x)|,$$

valable pour toute valeur de $x\ (a < x < b)$. Ainsi, par exemple, si tous les $\lambda_i = 1$, de sorte que $\sigma_m = m$, on a, en posant $x = a + b/2$,

$$\left| f^{(m)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| < \left(\frac{2}{b-a}\right)^m f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Dès lors, s'il existe un *intervalle fini (a, b) où la monotonie de $f(x)$ est du même type que celle de* $\sin x$ (nous disons, dans ce cas, que la fonction est *cycliquement* monotone), *$f(x)$ est entière de genre non supérieur à* 1.

D'ailleurs, quel que soit le *type*, on a, pour $\sigma_m + k = n$, où $0 < k < \lambda_{m+1}$,

$$(3)\qquad |f^{(n)}(x)| < \frac{\lambda_1!\,\ldots\,\lambda_m!\,k!}{y^{\mathrm{P}_n}(b-y)^{\mathrm{Q}_n}|y-x|^k}\,|f(y)|,$$

où y peut être pris arbitrairement dans l'intervalle (a, y) ou (x, b), suivant que $f^{(n)}(x)$ appartient à une alternance ou à une permanence.

Il en résulte que $f(x)$ *sera entière toutes les fois que*

$$\lim \sqrt[\sigma_m]{\frac{\lambda_1!\ldots\lambda_m!}{\sigma_m!}} = 0,$$

donc en particulier, si $\lim \dfrac{\lambda_m}{\sigma_m}$.

2. *Si la fonction $f(x)$ régulièrement monotone sur le segment fini (a, b) n'a pas de points singuliers sur l'axe réel, $f(x)$ est une fonction entière.*

La démonstration résulte de la remarque suivante. Soit $R(x)$ le rayon de convergence de la série de Taylor de $f(x)$ au point (x); nous disons que x est un point *neutre*, si les suites de dérivées telles que

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\left|\frac{f^{(p_n)}(x)}{p_n!}\right|} = \frac{1}{R(x)}$$

peuvent aussi bien contenir une infinité de termes appartenant à des permanences qu'à des alternances. On démontre, et c'est là le point essentiel, qu'*une fonction régulièrement monotone sur (a, b) ne peut avoir plus d'un point neutre*. On prouve ensuite que, *si le point neutre existe, son cercle de convergence doit contenir deux points singuliers z_1 et z_2 réels de $f(x)$ $(z_1 \leqq a, z_2 \geqq b)$*; *dans le cas contraire, le rayon de convergence* R *en a ou en b est supérieur ou égal à $(b-a)$, et le cercle contient au moins un point singulier réel.* Ainsi, si $F(x)$ est une série de Taylor de rayon de convergence fini R, telle qu'aucun des points $\pm R$ n'est singulier, l'ensemble E des zéros des dérivées successives de $F(x)$ est partout dense sur $(-R, +R)$.

3. En faisant varier a, b, on peut appliquer les inégalités (2) et (3) au cas où $f^{(n)}(0) \gtrless 0$ quel que soit n, sans supposer que $f(x)$ soit régulièrement monotone sur un segment fixe. Soit b_i une suite de nombres *positifs non croissants*, tels que $f^{(i)}(x)$ garde son signe pour $-b_i \leqq x \leqq b_i$; le type de la fonction $f(x)$ est défini par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, comme précédemment. En utilisant des inégalités analogues à (2) et (3) on obtient ainsi la proposition : *la fonction $f(x)$ est nécessairement analytique, si*

$$\underline{\lim}\, b_{\sigma_n} \sqrt[\sigma_n]{\frac{\sigma_n!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}} = A > 0;$$

la fonction $f(x)$ est entière, si

$$b_{\sigma_n} \sqrt[\sigma_n]{\frac{\sigma_n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_n!}} \to \infty.$$

En particulier, *lorsqu'il existe un nombre* M *fixe, tel que $\lambda_i \leqq M$, la fonction $f(x)$ est entière toutes les fois que $nb_n \to \infty$; pour que $f(x)$ soit analytique, il suffit alors que $\underline{\lim}\, nb_n > 0$.*

Ainsi le type cyclique est celui qui permet aux fonctions analytiques la plus grande condensation des zéros de leurs dérivées successives. En effet, soient β_i des nombres positifs, tels que $f^{(i)}(x)$ s'annule au moins une fois

pour $|x| \leq \beta_i$; *si* $\lim n\beta_n = 0$, *la fonction* $f(x)$ *ne peut être analytique à l'origine* (¹).

Or, si $f^{(n)}(0) \gtrless 0$, on peut poser $b_n = \min_{i \leq n} \beta_i$; donc, $\lim nb_n = 0$ entraîne également que $f(x)$ ne peut être analytique à l'origine. On démontrerait de même que $f(x)$ ne peut être *entière*, si, $C > 0$ étant fixe, $\underline{\lim}\, nb_n = C$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations* $s = f(x, y, z, p, q)$ *qui admettent un invariant pour un seul système de caractéristiques.* Note de M. **R. Gosse**, présentée par M. Goursat.

La détermination de pareilles équations est liée à la découverte de conditions simples, qui soient nécessaires à l'existence de l'invariant. Dans le fascicule XII du *Mémorial des Sciences mathématiques*, j'ai montré comment on en pouvait former une suite infinie dans le cas où il n'existe aucune fonction $\lambda(x, y, z, p, r)$ telle que

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe une telle fonction.

I. Si λ ne contient pas r, j'ai montré (*loc. cit.*, p. 35) qu'il existe une fonction $\theta(x, y, z, p)$ telle que

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} + \xi(x)\,\mathrm{H}(f) + \mathrm{F}(f) = 0$$

en posant, quelle que soit la fonction φ,

$$\mathrm{H}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p\frac{\partial \varphi}{\partial z} + f\frac{\partial \varphi}{\partial q}, \qquad \mathrm{F}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial q}.$$

Si l'on suppose que l'ordre minimum d'involution est supérieur à 5, la continuation de la discussion même qui donne la condition en θ montre qu'on peut lui adjoindre la suivante :

(¹) Un énoncé de mon livre cité (p. 197) doit être corrigé ainsi : si la dérivée $f^{(n)}(x)$ s'annule au moins une fois dans chaque intervalle de longueur δ_n du segment $\overline{ab}$, la fonction $f(x)$ ne peut être analytique en aucun point de ce segment, lorsque $\underline{\lim}\, n\sqrt[n]{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n} = 0$ (donc, en particulier, dans le cas où $n\delta_n = 0$).

Il existe toujours une fonction $\omega(x, y, z, p_1, p_2, p_3)$ *telle que*

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = \lambda \frac{d^2}{dx^2}[\lambda H(f)] - F(f)\left(\frac{d\,Lh}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{d}{dz}\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Et la discussion de cette condition fournit au moins deux nouvelles conditions nécessaires simples.

II. M. Lainé ([1]) a fait fort justement observer qu'il fallait considérer aussi le cas où λ contient r, qui est celui où il existe une involution du second ordre

$$r + \varphi(x, y, z, p) = 0,$$

on a alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varphi\frac{\partial f}{\partial p} - H(f), \qquad \lambda = \frac{1}{r+\varphi}.$$

On peut obtenir les conditions G et H que donne M. Lainé par un calcul absolument identique à celui que j'ai fait quand $\frac{\partial\lambda}{\partial r}$ est nul. On trouve ainsi que la condition en θ doit être remplacée par la condition

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x, y, z, p) + \xi(x)\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} - F(f) = 0.$$

Si $\xi(x)$ n'est pas nul, la discussion de cette condition permet d'ajouter, à la condition en φ, l'unique condition

$$\frac{\partial\tau(x, y, z, p)}{\partial y} + \xi_1(x)\frac{\partial f}{\partial p} + F(f) = 0.$$

On a ainsi les conditions G de M. Lainé.

Si ξ n'est pas nul, elle donne les deux conditions supplémentaires

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} + \tau\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \xi_1(x)\frac{\partial f}{\partial p} + (1-\xi)F(f) = 0.$$

Si ξ n'est pas égal à 1, on en conclut que l'équation admet l'invariant du troisième ordre

$$(1-\xi)\left[\frac{d}{dx}L(r+\varphi) + \tau(r+\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\right] - \sigma - \xi_1 L(r+\varphi) = X(x).$$

([1]) *Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 209.

et les conditions en φ, τ et σ sont *nécessaires et suffisantes* pour qu'il existe un invariant du troisième ordre.

Si ξ est égal à 1, on a la seule condition en τ à adjoindre à la condition en φ. Ainsi, quand la seconde condition H de M. Lainé ne disparaît pas, on est sûr de l'existence d'un invariant du troisième ordre; quant à la troisième, elle est, en toute hypothèse, une conséquence identique des conditions en φ et τ.

Par une généralisation analogue à celle du premier cas, et sous les mêmes réserves, on peut adjoindre à la condition en u la suivante :

Il existe toujours une fonction $\omega(x, y, z, p_1, p_2, p_3)$ *telle que*

$$\frac{\partial\omega}{\partial y} = X\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial p} - F(f)\left(\frac{dL\lambda}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Et la discussion de cette relation fournit encore au moins deux nouvelles conditions nécessaires simples.

Dans les deux cas, la méthode qui donne la condition en ω en fournit une suite infinie de nouvelles et la confrontation de ces conditions permet dès lors d'espérer trouver sans trop de peine, non plus seulement les équations $s = f(x, y, z, p, q)$ de la première classe, mais encore celles qui admettent un invariant pour un seul système de caractéristiques : j'ai pu faire effectivement le calcul, pour le premier cas, en laissant de côté les invariants d'ordre inférieur à 5.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les suites de zéros des dérivées successives.* Note de M. W. Gontcharoff, présentée par M. Hadamard.

Dans ce qui suit, je vais signaler certaines relations qui existent entre la nature analytique d'une fonction indéfiniment dérivable $f(x)$ d'une variable x (complexe ou réelle) et la distribution des zéros des dérivées successives $f(x)$, $f'(x)$, …, $f^{(n)}(x)$, …. Soient x_0 un zéro *quelconque* de $f(x)$, x_1 un zéro quelconque de $f'(x)$, …, x_n un zéro quelconque de $f^{(n)}(x)$, etc.

I. *Si la série* $\sum_{i=0}^{\infty}|x_i - x_{i+1}|$ *est convergente, la fonction* $f(x)$ *ne saurait être analytique au point* $x = X$, *où* $X = \lim_{n\to\infty} x_n$, *sans se réduire à un polynome*

aux environs de ce point. En particulier, si $f(x)$ est une fonction entière, toute série de la forme $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i - x_{i+1}|$ est divergente. Inversement, on peut construire des fonctions entières pour lesquelles la divergence d'une série de la forme indiquée soit si faible qu'on le veut (rien n'étant supposé au sujet de l'existence de la limite des x_n).

II. *Admettons que la suite des x_i converge vers une limite finie, soit* $X = 0$. *Si l'on a*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n\,|x_n - x_{n+1}| \leqq L,$$

la fonction $f(x)$ ne saurait être holomorphe dans le cercle $|x| = R$, où $R > Le$, sans se réduire à un polynome.

Si $\lim_{n\to\infty} n|x_n - x_{n+1}| = 0$, on obtient la même conclusion que dans le théorème précédent. Si $f(x)$ est une fonction entière transcendante, il s'ensuit que $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n|x_n - x_{n+1}| = \infty$.

III. Posons $\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i+1}| = s_n$. Soient $f(x)$ *une fonction entière transcendante*, $M(r)$ son module maximum sur le cercle $|x| = r$. En limitant d'en haut la croissance de $M(r)$, on obtient une limitation d'en bas pour la croissance de s_n. Par exemple *les hypothèses*

$$(a) \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \leqq \rho \qquad (\rho > 0),$$

$$(b) \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log\log M(r)}{\log r} \leqq \rho \qquad (\rho > 0),$$

$$(c) \qquad \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log\log r} \leqq \rho \qquad (\rho > 1)$$

entraînent respectivement :

$$(a') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log s_n}{\log n} \geqq \frac{1}{\rho},$$

$$(b') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log s_n}{\log\log n} \geqq \frac{1}{\rho},$$

$$(c') \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log\log s_n}{\log n} \geqq \frac{1}{\rho - 1}.$$

Plus précisément, en partant de l'hypothèse

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\rho} \leqq A,$$

j'ai obtenu

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{s_n}{n^{\frac{1}{\rho}}} \geqq \left(\frac{1}{A e \rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{\rho}}}.$$

On s'aperçoit que la croissance de s_n est de même ordre que celle de $|a_n|$, où a_n désigne le $n^{\text{ième}}$ zéro de $f(x)$, ces zéros étant rangés suivant leurs modules croissants. Dans le cas où $\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r} = 0$, on doit avoir nécessairement : $\lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{n} = \infty$, et, par conséquent, $\overline{\lim}_{n \to \infty} |x_n| = \infty$.

IV. Plaçons-nous dans le cas où *la série* $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i - x_{i+1}|$ *est convergente*, et posons $\lim_{n \to \infty} x_n = X = 0$, $\rho_n = \sum_{i=n}^{\infty} |x_i - x_{i+1}|$. Cette fois, les données étant supposées réelles, soit M_n le maximum de la valeur absolue de $f(x)$ dans un intervalle contenant le point $x = 0$. La décroissance rapide de ρ_n entraîne la croissance rapide de M_n. Ainsi *les relations*

$$(a) \qquad \varliminf_{n \to \infty} \frac{\log \frac{1}{\rho_n}}{\log n} \geqq \alpha \qquad (\alpha > 0),$$

$$(b) \qquad \varliminf_{n \to \infty} \frac{\log \frac{1}{\rho_n}}{\log \log n} \geqq \alpha \qquad (\alpha > 0)$$

ont pour conséquence, respectivement,

$$(a') \qquad \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}}}{\log n} \geqq \alpha,$$

$$(b') \qquad \overline{\lim}_{n \to \infty} \frac{\log \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}}}{\log \log n} \geqq \alpha.$$

à moins que $f(x)$ ne se réduise à un polynome.

On démontre les propositions énoncées en s'appuyant sur la formule d'interpolation suivante, généralisation immédiate de la formule de Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_1) \int_{x_0}^{x} dx' + f''(x_2) \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' + \ldots$$
$$+ f^{n}(x_n) \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} dx^{(n)} + R_n,$$

où

$$R_n = \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_n}^{x^{(n)}} f^{n+1}\left[x^{n+1}\right] dx^{n+1}.$$

LOGIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie de la démonstration.* Note de M. **J. Herbrand**, présentée par M. Hadamard.

I. La théorie de la déduction, tant qu'elle ne fait intervenir que les symboles logiques tels que $\curlyvee$ (ou), $\sim$ (non), $\supset$ (implique), dont le rôle est de lier des propositions entre elles, peut être fondée, par exemple, comme on sait, sur les propositions primitives de Russell et sur la règle d'implication suivante :

Si p et $p \supset q$ sont vraies, q est vraie.

On en déduit des propositions vraies, quelles que soient les valeurs logiques (cf. Zaremba, *Mémorial des Sc. math.*, p. 7) des lettres (propositions éléments) qui y figurent ; on les appellera des identités propositionnelles de première espèce. On peut *démontrer* (au sens de Hilbert) :

1° Que cette théorie n'est pas contradictoire, c'est-à-dire que P et $\sim$P ne peuvent être vraies simultanément ;

2° Que toute proposition dont la valeur logique est le vrai, quelles que soient les valeurs logiques des lettres qui y figurent, est une identité propositionnelle que l'on saura alors démontrer, et réciproquement.

II. On peut alors introduire des propositions contenant des variables (pouvant être de différentes sortes) et les nouveaux symboles : $(\mathrm{E}x)$ (il existe x tel que), et (x) (quel que soit x); et fonder leur théorie, indépendamment de celles des types, de différentes manières, dont la plus simple au point de vue pratique est la suivante : On conserve les propositions primitives de la théorie des identités propositionnelles de première espèce, et la règle d'implication. On ajoute les règles suivantes :

Règle 1. — Si Φx est vraie, $(x) . \Phi x$ est vraie.

Règle 2. — Si Φxx est vraie, $(\mathrm{E}y) . \Phi yx$ est vraie.

Règle 3. — Si

$$\Phi x_1 x_1 x_2 \ldots x_n . \curlyvee . \Phi x_2 x_1 x_2 \ldots x_n . \curlyvee \ldots \curlyvee . \Phi x_n x_1 x_2 \ldots x_n$$

est vraie, $(\mathrm{E}y) . \Phi y x_1 x_2 \ldots x_n$ est vraie.

Règle 4. — On peut remplacer $\sim : (x) . \Phi x$ par $(\mathrm{E}x) : \sim . \Phi x$; $\sim : (\mathrm{E}x) . \Phi x$ par $(x) : \sim . \Phi x$; $p . \curlyvee . (x) . \Phi x$ par $(x) : p . \curlyvee . \Phi x$; $p . \curlyvee (\mathrm{E}x) . \Phi x$ par $(\mathrm{E}x) : p . \curlyvee . \Phi x$, quelles que soient les propositions Φx et p, et réciproquement.

Appelons « identités propositionnelles » de deuxième espèce les proposi-

tions vraies ainsi obtenues. On peut démontrer que cette méthode équivaut à celle de Russell et Whitehead (même si l'on n'utilise la règle 3 que pour $n=2$) et n'est pas contradictoire.

Appelons « identités normales » celles que l'on peut obtenir sans utiliser la règle d'implication :

1° On peut reconnaître si une proposition est une identité normale et, dans ce cas, la démontrer;

2° Si, dans une identité propositionnelle de première espèce

$$A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

on remplace $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par des propositions quelconques, on a une identité normale;

3° Étant donnée une identité propositionnelle P, il existe une identité normale H telle que $H . \supset . P$ soit une identité normale.

Une théorie mathématique quelconque peut s'obtenir en remplaçant les propositions-éléments par des propositions de nature déterminée que l'on assujettit à des propositions primitives en nombre fini ou infini. P étant un théorème vrai dans une théorie, il existe une identité normale H et un certain nombre de propositions primitives de la théorie $H_1, H_2, \ldots, H_n$ telles que $H . H_1 . H_2 \ldots H_n . \supset . P$ soit une identité normale.

III. On obtient une théorie mathématique particulière en considérant des variables de différents types (individus, classes d'individus, relations entre individus, classes de classes, etc., comme chez Russell) et en utilisant les propositions-éléments $x \varepsilon \alpha$ (x est dans la classe α) et $x R y$ (x et y sont liés par la relation R), les variables pouvant être de différents types. Les propositions primitives sont de la forme

$$(E\alpha) :: (\beta) :. (\lambda) : \beta\varepsilon\lambda . \supset . \alpha\varepsilon\lambda : \supset . \ (x) . x\varepsilon\beta \equiv \Phi x,$$
$$(ER) :: (S) :. (\lambda) : S\varepsilon\lambda . \supset . R\varepsilon\lambda : \supset . (xy) . xSy \equiv \Phi xy,$$

où l'on remplace Φx (et Φxy) par des propositions quelconques contenant x (et y) comme variables. On obtient ainsi une théorie équivalente à celle de Russell, mais sans axiome de réductibilité, et qu'on démontre aisément n'être pas contradictoire. On peut ajouter parmi les propositions primitives l'axiome de choix (la théorie reste non contradictoire) et l'axiome de l'infini.

Désignons cette théorie par R_1. On peut également remplacer l'axiome de l'infini ordinaire par un autre exigeant l'existence de classes de puissance

plus grande que $\aleph^{(n)}$, quel que soit n, en posant

$$\aleph^{(0)} = \aleph_0, \quad \aleph^{(n+1)} = 2^{\aleph^{(n)}}.$$

Désignons-la par R_2. On peut démontrer que l'axiomatique de Zermelo sans axiome de l'infini admet une interprétation dans R_1; avec l'axiome de l'infini, dans R_2; et que R_1 admet une interprétation dans l'axiomatique de Zermelo avec axiome de l'infini.

HYDRODYNAMIQUE. — *Quelques remarques sur les fonctions de courant.* Note [1] de M. **D. Riabouchinsky.**

Le problème de la généralisation de la théorie des fonctions d'une variable complexe a été traité, dans plusieurs Mémoires classiques, par M. E. Picard et M. V. Volterra, et M. Picard a montré que ce problème n'étant pas déterminé, on pouvait se placer dans une telle tentative à des points de vue très différents. D'autre part, dans ses conférences à la Clark-University (1899), M. Émile Picard a insisté sur les désavantages qu'il y a à réduire la théorie des fonctions à la théorie des fonctions analytiques et en parlant (*Quelques réflexions sur la Mécanique*, 1900) sur l'explication mécanique des phénomènes, il a posé la question : « Pourquoi supposer qu'il n'y a d'explication mécanique que celle qui cadrerait avec les équations de Lagrange ? Ne pourrait-on pas adopter un point de vue plus compréhensif, et alors n'est-on pas menacé de tomber dans une querelle de mots ? » Les problèmes que je discute dans la présente Note rentrent dans cet ordre d'idées.

Dans un mouvement fluide à deux ou à trois dimensions, dont les composantes de la vitesse seraient $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ et $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $w = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, l'équation de continuité prendrait la forme des équations des cordes et des membranes vibrantes, mais ces équations détermineraient dans ce cas des mouvements rotationnels d'un fluide incompressible. On peut exposer la théorie générale des équations aux dérivées partielles en se plaçant à ce point de vue, c'est-à-dire en considérant ces équations comme conditions que la divergence d'un champ de vecteurs est nulle en tout point, exception faite de certaines surfaces, lignes et points-lieux des singularités. Il est alors naturel d'interpréter les fonctions φ comme *potentiels de vitesse*

[1] Séance du 30 avril 1928.

généralisés adjoints aux fonctions de courant ψ_1, ψ_2, dont les fonctions de courant de Lagrange et de Stokes sont des cas particuliers et d'écrire

$$u = \frac{D(\psi_1, \psi_2)}{D(y, z)} = \varpi \frac{\partial x}{\partial \varphi} = f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad f_1 \frac{D(y, z)}{D(\psi_1, \psi_2)} = \frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

avec les analogues pour v et w. ϖ est le déterminant fonctionnel de φ, ψ_1, ψ_2 en x, y, z. Ces équations, qui peuvent être étendues à un nombre quelconque de variables, généralisent les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe

(1) $$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varpi \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \varpi \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

En prenant φ, ψ_1, ψ_2 comme coordonnées curvilignes, on obtient un système de variables jouissant de propriétés assez distinctes de ceux de Lagrange et d'Euler [1].

Si l'on applique à une expression de la forme $\varphi + \varepsilon\psi = f(x + \varepsilon y)$, $\varepsilon^2 = -a$, où a est une constante réelle quelconque, le raisonnement conduisant aux conditions de monogénéité dans le cas particulier $\varepsilon^2 = -1$, on obtient les relations

(2) $$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Il est évident qu'on peut ramener les secondes parties de ces équations aux conditions (1) en posant $\sqrt{a}\,\psi = \psi_1$ et $\sqrt{a}\,y = y_1$; mais si l'on précise que c'est la fonction ψ que l'on considère comme fonction de courant, on est conduit à une généralisation intéressante. Si l'on pose, par exemple, $\varphi + \varepsilon\psi = u_0(z + c^2 z^{-1})$, $z = x + \varepsilon y$, on obtient un mouvement *rotationnel*, dont la vitesse à l'infini ($x = \pm\infty$) est u_0, en présence d'un obstacle qui, selon que a est positif, nul ou négatif, est une ellipse, deux droites parallèles ou une hyperbole.

En substituant les expressions (2) dans les équations de Navier, on trouve

---

(1) J'ai exprimé la solution du problème des ondes de Gerstner dans le système de variables φ, ψ dans une Note antérieure (*Comptes rendus*, 179, 1924, p. 883). Comme solution approchée du problème de M. Boussinesq de l'onde solitaire, on trouve

$$x - iy = \frac{\varphi - i\psi}{a} - c\ell \operatorname{tangh} \frac{m}{a}(\varphi + i\psi).$$

L'approximation de cette solution est équivalente à celle de la solution de Mc Cowan et l'on obtient le profil de l'onde sous une forme paramétrique.

comme conditions d'intégrabilité

$$\left(\rho_x - \frac{1}{a}\rho_y\right)\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad H = \frac{1}{2}w^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho\Delta\varphi, \qquad w^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2,$$

où nous appelons ρ_x, ρ_y les composantes horizontale et verticale de l'inertie. On peut satisfaire à cette condition soit en posant $H = f_1(x, t) + f_2(y, t)$, soit en posant $\rho_y = a\rho_x$. La dernière de ces conditions, lorsque $a \neq 1$, caractérise des *hydrodynamiques non lagrangiennes* [1].

L'intérêt principal des relations (2) réside dans le fait qu'elles permettent de suivre et d'interpréter les modifications que subissent les proportions fondamentales de la théorie des fonctions d'une variable complexe, lorsqu'on fait varier le paramètre a de $-\infty$ à $+\infty$.

NAVIGATION. — *Construction rapide, sur la carte, des lignes de relèvements constants pour utiliser les relèvements radiogoniométriques pris du bord.* Note [2] de M. **D. Gernez**, présentée par M. Charcot.

I. Les relèvements radiogoniométriques d'une station terrestre pris du bord, étant des arcs de grand cercle, ne peuvent être portés directement sur une carte comme les relèvements pris à petite distance puisqu'ils coupent sous des angles différents le méridien du navire et celui de la station. On peut néanmoins les utiliser en construisant sur la carte marine les lignes de relèvements constants de cette station, la ligne de relèvement constant à n^o d'une station étant le lieu géométrique des points terrestres d'où l'on relève cette station à n^o.

II. Chaque point de la ligne est déterminé en calculant l'écart en longitude entre la station et l'intersection de la ligne avec un parallèle de latitude donnée. Le calcul se fait de la façon suivante.

Le navire et la station relevée étant dans le même hémisphère, soient le triangle sphérique PZA formé par la station A, le pôle P de son hémisphère et le navire Z d'où l'on relève A suivant le relèvement Z. L étant la latitude de la station A et l celle du navire Z, on a

$$\cot PA \sin PZ = \cot Z \sin P + \cos PZ \cos P$$

---

[1] J'ai considéré les cas particuliers $a = 0$, $a = -1$, dans une Note antérieure (*Comptes rendus*, **179**, 1924, p. 1136).

[2] Séance du 26 mars 1928.

ou

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tang} L \cos l = \cot Z \sin P + \sin l \cos P.$$

Soit φ un angle auxiliaire tel que

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\cot Z}{\sin l},$$

on a

$$\cot Z = \sin l \operatorname{tang} \varphi,$$

et l'équation (1) devient

$$\operatorname{tang} L \cos l = \frac{\sin l \sin \varphi \sin P + \sin l \cos \varphi \cos P}{\cos \varphi}$$

ou

$$\operatorname{tang} L \cos l \cos \varphi = \sin l \cos (P - \varphi),$$

d'où l'on tire

$$\text{(3)} \qquad \cos (P - \varphi) = \operatorname{tang} L \cos \varphi \cot l.$$

Les équations (2) et (3) permettent de déterminer P.

L'angle φ étant donné par sa tangente doit être toujours aigu : on lui donne le signe + si Z est compté à partir du pôle de l'hémisphère où est le navire, le signe — si Z est compté à partir du pôle opposé.

φ étant toujours aigu, $\cos(P - \varphi)$ est toujours positif, donc $(P - \varphi)$ est toujours aigu, mais peut être positif ou négatif. On prendra donc les deux valeurs de $(P - \varphi)$ l'une positive l'autre négative, et pour chacune on calculera

$$P = (P - \varphi) + \varphi \text{ algébriquement.}$$

En combinant chaque valeur de P ainsi trouvée avec la longitude de la station relevée, on obtient les longitudes de 2 points de la courbe dont la latitude est l. Ayant ainsi calculé les longitudes de plusieurs points de la ligne de relèvement constant Z de A, de latitudes voisines de la latitude estimée du navire, on trace sur la carte la courbe continue passant par ces points.

La discussion complète de la formule (3) et l'examen du cas où le navire et la station relevée sont dans des hémisphères différents, ce qui conduit à une formule analogue, sortent du cadre de cette Note.

III. Le calcul de P peut être disposé comme suit :

$\log \cot Z$	...	$\log \operatorname{tang} L$	...				
$\operatorname{colog} \sin l$	...	$\log \cot l$	...				
$\log \operatorname{tang} \varphi$	...	$\log \cos \varphi$	...	φ	...	et	...
		$\log \cos (P - \varphi)$	...	$P - \varphi = +$	...	ou	$-$ ...
		2 valeurs de P :			...		...

Le calcul de l'angle auxiliaire φ et une partie du calcul de $(P-\varphi)$ *sont indépendants de la position géographique de la station relevée.* On peut donc construire une Table donnant pour chaque degré de relèvement les valeurs de φ et de $\log S = \log\cot l + \log\cos\varphi$ correspondant à toutes les valeurs de l de 0° à 60°. Le calcul de P serait alors simplifié et réduit à la forme suivante :

log tang L	...			
log S	...	φ	...	...
log cos (P — φ)	...	P — φ	+ ...	— ...
		2 valeurs de P :	... et	...

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — *Les équations de Maxwell dans la théorie commune à la gravitation et à l'électricité.* Note [1] de M. **Léopold Infeld**, présentée par M. Maurice de Broglie.

Dans une Note publiée dans la *Physikalische Zeitschrift* (29, p. 143) j'ai essayé d'esquisser une théorie de gravitation et d'électricité basée sur un système de géométrie non riemannienne.

Dans ce qui suit j'indique une conséquence remarquable de cette théorie relative à l'extension des équations de Maxwell au cas de la théorie de la relativité générale.

On sait que la relativité générale admet d'habitude la forme suivante des équations de Maxwell :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}\,\varphi^{ik}}{\partial x^k} = I^i, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial\varphi_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial\varphi_{li}}{\partial x^k} = 0; \tag{2}$$

φ_{ik} désigne ici le tenseur électromagnétique, I^k le courant électrique.

Il en résulte :

$$g^{ls}\varphi_{ik;ls} + I_{k;i} - I_{i;k} + R_{ks}\varphi^s_i - R_{is}\varphi^s_k + 2B_{ikls}\varphi^{ls} = 0; \tag{3}$$

$\varphi_{ik;l}$ désigne ici la dérivée covariante, c'est-à-dire

$$\varphi_{ik;l} = \frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial x^l} - \{il, s\}\varphi_{sk} - \{kl, s\}\varphi_{is};$$

R_{iklm}, R_{ik} désignent des tenseurs de courbure riemanniens bien connus.

(1) Séance du 30 avril 1928.

Ces équations se heurtent à une objection grave, bien connue d'ailleurs [1], à savoir que dans le cas $I^k = 0$, *elles ne peuvent généralement pas, dans aucun système local, être ramenées à l'équation des ondes*, c'est-à-dire à l'équation

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 \varphi_{ik}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{ik}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{ik}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{ik}}{\partial t^2} = 0.$$

Par contre, en partant des équations de la théorie esquissée dans notre Note précitée, on arrive, en développant nos calculs, à l'équation (1) et à l'équation suivante :

$$(5)\qquad g^{ls}\varphi_{ik;ls} + I_{k;i} - I_{i;k} = 0.$$

Or il est bien évident que dans le cas $I^k = 0$, cette équation se ramène, dans un système local convenable, à l'équation des ondes.

Dans le cas particulier, quand $g_{ik} = \delta_{ik}$ (c'est-à-dire quand les g_{ik} prennent les valeurs de la théorie de la relativité restreinte), les équations (5) prennent la forme suivante :

$$(6)\qquad \delta^{ls}\frac{\partial^2 \varphi_{ik}}{\partial x^l\,\partial x^s} + \frac{\partial I_k}{\partial x^i} - \frac{\partial I_i}{\partial x^k} = 0.$$

Au point de vue physique nos équations peuvent être considérées comme équivalentes à celles de Maxwell de la théorie de la relativité restreinte, puisque toute solution des équations (2) et des équations

$$(7)\qquad \frac{\partial \varphi_i^k}{\partial x^k} = I_i$$

satisfait à l'équation (5).

Esquissons brièvement la voie qui conduit à l'équation (5) et (1).

Partons de l'équation d'Einstein :

$$(8)\qquad K_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{sk}^l \Gamma_{il}^s + \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^s \Gamma_s^l = 0.$$

Dans notre géométrie nous supposons les composantes du déplacement parallèle Γ_{ik}^l (*non symétriques*) très peu différentes de celles de la géométrie riemannienne, c'est-à-dire des symboles de Christoffel.

Les hypothèses et les raisonnements de notre Note précitée conduisent

---

[1] Cf. par exemple EDDINGTON, *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung*, p. 267, Berlin, Springer, 1925.

aux valeurs suivantes de Γ^l_{ik} (non explicitées dans ladite Note) :

$$(9) \qquad \Gamma^l_{ik} = \{i, k, l\} + \frac{1}{2}\alpha(\varphi^l_{i,k} + \varphi^l_{k,i} + g^{sl}\varphi_{ik,s}),$$

où α est un facteur numérique extrêmement petit.

Après avoir exécuté les calculs, en négligeant (conformément à notre hypothèse) les puissances supérieures de α, on arrive à des équations ne contenant pas α. On trouve notamment en explicitant la partie symétrique de l'équation (8) les équations bien connues de gravitation d'Einstein, et la partie symétrique gauche nous donne les équations (5).

En ce qui concerne les équations de Maxwell (1) on les obtient en identifiant le vecteur géométrique

$$(10) \qquad S_k = (\Gamma^s_{ks} - \Gamma^s_{sk})\frac{1}{\alpha}$$

au vecteur-courant I_k.

ÉLECTRICITÉ. — *Sur la mesure absolue des coefficients d'influence.* Note [1] de M. **R. Darbord**, présentée par M. Brillouin.

Ayant besoin à la fois, dans un montage électrométrique comprenant une chambre d'ionisation, d'un coefficient d'influence variable et d'un coefficient d'influence étalonné, j'ai pensé à me servir du premier pour éviter le second. La méthode exposée dans cette Note permet la mesure absolue d'un coefficient d'influence avec, sans précautions spéciales, une précision de l'ordre du millième.

Comparons, pour chaque valeur, le coefficient variable C au coefficient d'influence C_0 de la chambre d'ionisation.

La méthode de De Sauty permet de le faire; elle détermine le rapport $\gamma = \frac{C_0}{C}$ par le rapport de deux résistances.

Le coefficient variable est du type condensateur-plan à anneau de garde. Il comprend le plateau relié à l'électromètre et le plateau de charge, à l'intérieur d'une enceinte métallique qui forme anneau de garde pour le premier plateau et protection électrostatique pour l'ensemble. Le plateau de charge est porté par une vis micrométrique qui sert à faire varier sa distance à l'autre plateau. *Le coefficient d'influence et l'appareil nécessaire à*

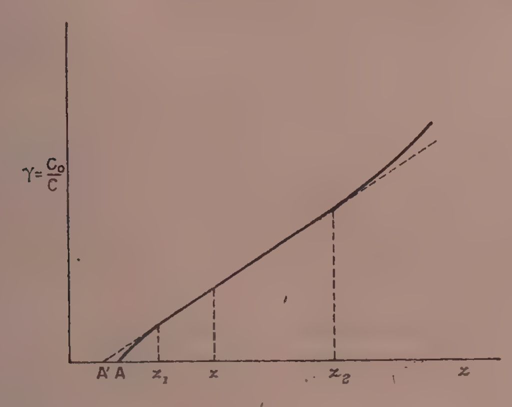
---

[1] Séance du 23 avril 1928.

la mesure de la distance des électrodes ne font donc qu'un et cette mesure délicate peut s'effectuer sans aucun démontage. Par construction, le plateau relié à l'électromètre est dans le plan de son anneau de garde et les armatures sont parfaitement planes.

Par contre, le parallélisme des armatures n'est pas assuré avec précision. C'est pourquoi, dans les expériences de ce genre, les armatures sont habituellement séparées par des cales de quartz (qui créent peut-être d'ailleurs une petite perturbation) au lieu de se faire simplement vis-à-vis. Cependant, on peut montrer que si les plateaux ne sont pas trop rapprochés, un défaut de parallélisme du premier ordre introduit seulement, dans le calcul du coefficient d'influence, une erreur du second ordre, à condition de prendre, comme distance d'armatures, la distance du centre du plateau collecteur au plateau de charge. Cette distance ne peut se mesurer directement.

Représentons le rapport γ en fonction de la position z du plateau de charge, indiquée avec précision par la vis micrométrique. La courbe présente un point d'inflexion et se confond sur une grande longueur avec sa tangente



en ce point. Cela veut dire que pour une position z comprise entre z_1 et z_2 on peut considérer le coefficient d'influence C comme la résultante du coefficient C_1 correspondant à la position z_1, en cascade avec un coefficient d'influence C' d'épaisseur bien déterminée $(z - z_1)$:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'} \quad \text{avec} \quad C' = \frac{S}{4\pi(z - z_1)},$$

d'où

$$(1) \qquad \gamma = \gamma_1 + \frac{4\pi C_0}{S}(z - z_1).$$

Cette conception permet un étalonnage précis. Il faut prendre pour S la surface du plateau relié à l'électromètre, ou plutôt cette surface augmentée de la moitié de l'aire correspondant au sillon de l'anneau de garde.

Quand on rapproche trop les plateaux, la courbe passe au-dessous de la tangente. Cela se comprend, puisque le coefficient d'influence devient réellement infini lorsque les plateaux arrivent au contact (point A), c'est-à-dire avant que leurs centres ne soient confondus (point A').

Si les armatures sont trop éloignées, le principe de l'anneau de garde s'applique mal, il y a dispersion des lignes de force émises par le plateau inducteur et, pour obtenir une capacité donnée, il faut que les armatures soient un peu plus rapprochées, la courbe se trouve au-dessous de la tangente. *Cette méthode permet donc de reconnaître avec sécurité dans quelles conditions on peut appliquer le principe de l'anneau de garde.*

Dans la formule (1) tout est connu sauf C_0 :

$$C_0 = \frac{S}{4\pi}\frac{\gamma-\gamma_1}{z-z_1} = \frac{S\alpha}{4\pi},$$

en appelant α le coefficient angulaire de la tangente.

Le coefficient d'influence fixe est donc étalonné et, par cela même, le coefficient variable, pour toutes les positions du plateau de charge.

ONDES HERTZIENNES. — *Sur un nouveau mode d'entretien d'oscillations dans les lampes triodes.* Note de M. **E. Pierret**, présentée par M. G. Ferrié.

Des recherches en vue d'étudier la propagation des ondes très courtes nous ont amené à observer un mode de fonctionnement des lampes triodes qui fournit des oscillations stables encore plus courtes que celles de Barkhausen. Ces dernières n'ont pu être obtenues jusqu'ici sur des longueurs d'onde inférieures à 30^{cm} environ et ce n'est que très accidentellement et sans pouvoir ni fixer les conditions de fonctionnement, ni même reproduire à volonté l'expérience qu'ont été mesurées des ondes de longueur plus petite [Mlle Grechowa (1), Pierret (2)].

Par le procédé que nous décrivons dans cette Note, nous obtenons des ondes de longueur comprise entre 14^{cm} et 18^{cm}, très stables, et avec une

(1) Grechowa, *Zeits. f. Phys.*, 35, 1925, p. 50, et 38, 1926, p. 621.

(2) Pierret, *Comptes rendus*, 184, 1927, p. 1428.

intensité au moins égale à celle des ondes de Barkhausen de 45 à 50cm. Le montage est le même que celui que nous avons déjà employé pour produire ces dernières (2 *loc. cits*). Deux lampes Métal T. M. C. dont le diamètre de plaque a été un peu réduit et qui ont été vidées sur pompe Langmuir sans emploi de phosphore ont leurs plaques réunies par un fil et leurs grilles par une ligne sur laquelle on peut déplacer un pont constitué par une plaque de cuivre à travers laquelle passent les fils. Les grilles sont portées à un potentiel supérieur de 280 volts à celui du filament en réunissant le pont à une batterie d'accumulateurs, et les plaques à un potentiel inférieur de 40 volts à celui du filament. Une ligne, à l'origine de laquelle se trouve une soudure fer-constantan est couplée à l'oscillateur; elle permet, par l'observation des ondes stationnaires qui y sont produites, de mesurer la longueur de celles-ci.

Lorsqu'on déplace le pont sur les fils réunissant les grilles, on trouve une série de positions équidistantes de 8cm pour lesquelles l'oscillateur fonctionne au maximum et induit dans la ligne couplée des ondes dont l'internœud est aussi égal à 8cm. Ces oscillations sont produites dans des conditions très différentes de celles de Barkhausen pour les raisons suivantes :

La longueur d'onde est indépendante de la longueur des fils qui réunissent les plaques ou les grilles; on n'obtient d'oscillations que dans le fil de grille et non dans le fil de plaque; il est même possible de réunir les plaques par un fil bobiné sans que les oscillations cessent. L'intensité moyenne du courant de retour au filament par le circuit de plaque est nulle : les électrons émis par le filament n'atteignent donc jamais la plaque. Les oscillations ne s'amorcent que si le potentiel de la plaque est suffisamment inférieur à celui du filament. Si l'on applique la formule de Scheibe, qui permet de calculer approximativement la longueur des ondes de Barkhausen, en fonction des tensions des électrodes et de leurs dimentions, on trouve 38cm, alors que la longueur d'onde mesurée n'est que de 16cm.

En réglant non seulement la longueur du fil de grille, mais encore celle du fil de plaque, et en portant la plaque à un potentiel voisin de celui du filament, le même dispositif permet d'obtenir des ondes de Barkhausen ayant environ 45cm de longueur. Ces ondes s'établissent à la fois dans les deux fils et nécessitent un accord précis de leur longueur. La longueur d'onde observée dépend d'ailleurs, dans un certain domaine, des longueurs choisies. Le courant de plaque existe toujours dans le sens normal, ce qui prouve que les oscillations de Barkhausen ne se produisent que si les électrons émis par le filament atteignent la plaque.

Si l'on essaie de diminuer le potentiel de plaque pour passer progressivement des ondes de Barkhausen aux ondes plus courtes que nous avons obtenues, on trouve qu'il est impossible de le faire, du moins avec les lampes que nous avons utilisées. Quand le potentiel de plaque devient inférieur à celui pour lequel on obtient des ondes de Barkhausen de 40^{cm} environ, toute oscillation cesse; si l'on continue à baisser le potentiel de plaque, apparaissent alors dans le fil de grille les ondes très courtes de 16^{cm} de longueur et les différences de fonctionnement que nous venons de signaler.

Il est possible que les ondes courtes (30^{cm} à 50^{cm}) obtenues irrégulièrement avec le dispositif de Scheibe [1], simultanément avec une onde plus longue et considérées comme des harmoniques d'ondes de Barkhausen, soient de même nature que celles que nous obtenons de façon stable.

Le nouveau fonctionnement de l'oscillateur que nous venons de décrire paraît correspondre à une oscillation des électrons à fréquence très élevée et de petite amplitude de part et d'autre de la grille. Ces oscillations sont entretenues par la réaction qu'exerce la grille d'une lampe sur celle de l'autre par l'intermédiaire du fil qui les réunit, ce fil devant avoir une longueur correspondant à une différence de marche telle que la différence de phase entre les oscillations des deux grilles soit bien celle qui tende à empêcher l'équilibre électrique de se rétablir; il se produit alors des variations périodiques du potentiel de grille. Le parcours des électrons étant limité au voisinage immédiat de la grille, ces variations sont sans influence notable sur le potentiel de la plaque.

Nous signalerons, en terminant, qu'après que les oscillations sont amorcées, il est possible d'isoler les plaques en supprimant le fil qui les relie à la batterie d'accumulateurs et au filament sans que l'oscillateur décroche et sans que la longueur d'onde change.

Le mode d'oscillation des lampes triodes que nous venons d'exposer est celui qui, jusqu'ici, a donné avec une régularité, une stabilité et une intensité au moins égale à celle des oscillations de Barkhausen, les ondes entretenues les plus courtes.

---

(1) Scheibe, *Ann. der Phys.*, 73, 1924, p. 54, et *Jahrbuch der drahtlos. Teleg.*, 27, 1926, p. 1.

MAGNÉTISME. — *La susceptibilité magnétique et le deuxième point isoélectrique présumé de la gélatine.* Note de M. **M. Fallot**, présentée par M. A. Cotton.

1. Les travaux de Michaélis et de Loeb ont montré l'influence importante de la concentration des ions hydrogène sur les propriétés des solutions de gélatine. A leur suite, il est admis que la plupart des propriétés physiques des solutions de protéines varient avec cette concentration et que, pour une valeur critique, dite point isoélectrique, les colloïdes sont, semble-t-il, moins stables. Leur instabilité se traduit par l'absence de charges électriques, un minimum de viscosité, de pression osmotique, de conductivité.

Pour la gélatine, le point isoélectrique a lieu pour une concentration en ions hydrogène de 2.10^{-5}, correspondant à la valeur $pH = 4,7$. Il était intéressant de contrôler si le coefficient d'aimantation présentait également un minimum pour ce point, et de voir ce qu'il advenait de l'anomalie que nous avons signalée dans une Note précédente [1].

2. D'autre part, l'observation d'un deuxième minimum dans la courbe de viscosité de la gélatine au $pH = 7,7$ à 40° par Davis et Oakes [2], d'un minimum identique pour le gonflement par Wilson et Kern [3], et de deux minima d'absorption dans le spectre ultraviolet par Matthews [4], firent supposer l'existence d'un deuxième point isoélectrique pour la gélatine. L'explication donnée était que la gélatine peut exister sous deux formes différentes dans ses solutions.

3. Il m'a donc semblé utile de mesurer les coefficients d'aimantation dans un intervalle de pH allant de 3,69 à 8,20, de façon à couvrir ainsi les valeurs remarquées précédemment.

Les gélatines furent préparées selon les indications de Loeb [5] en utilisant l'acide acétique pour les pH inférieurs à 6,53 (gélatine naturelle utilisée) et la soude pour les pH supérieurs.

Les concentrations en ions hydrogène furent mesurées par la méthode

---

(1) Arcay et Fallot, *Comptes rendus*, **185**, 1927, p. 849.

(2) *J. am. Chem. Soc.*, **44**, 1922, p. 464.

(3) *Ibid.*, **45**, 1923, p. 3139.

(4) *Ibid.*, **46**, 1924, p. 852

(5) Loeb, *Les protéines et la théorie des phénomènes colloïdaux*, p. 55 et suiv. Alcan, 1924-1925.

électrométrique au moyen de l'électrode à hydrogène, la seule qui donne une précision suffisante.

Les coefficients d'aimantation furent étudiés de la même façon que dans nos expériences précédentes sur les liquides rigides. Les deux valeurs de $\chi_{app.}$ sont indiquées ci-dessous : celles mesurées aussitôt après l'établissement du champ et celles mesurées après 3 heures dans le champ. La température était 14°. Les résultats sont les suivants :

	$\chi_{app.}$ (à × par -10^{-6})		
pH.	instantané.	permanent.	Accroissement de $\chi_{app.}$ en pour 100.
3,69	1,36	2,60	91
4,32	0,83	1,24	50
4,53	0,81	1,01	25
5,06	0,87	1,19	37
5,58	1,08	1,78	65
5,92	1,06	1,74	64
6,53	1,01	1,64	62
7,51	0,90	1,34	49
8,20	0,85	1,17	38

Les courbes présentent un minimum vers 4,7 et, après un maximum vers 5,6, elles décroissent régulièrement.

4. De ces résultats, il semble qu'on puisse retenir qu'un seul minimum existe, pour le pH admis 4,7. Pour ce point seulement, la susceptibilité magnétique est minimum, et l'anomalie, représentée par l'accroissement de la déformation dans le champ, est aussi minimum.

Rappelons que ces résultats sont en accord avec les mesures de charges électriques par B.-N. Ghosh [1] et les mesures de pouvoirs rotatoires de solutions de gélatine par Bogue [2]. Ces deux auteurs n'ont trouvé aucun minimum pour les pH voisins de 7,7.

5. J'ai également mesuré les indices de réfraction et la dispersion pour toutes les solutions précédentes, au moyen du réfractomètre Féry portant la modification de Chéneveau pour les diverses longueurs d'ondes. Aucune variation appréciable n'a pu être décelée : les indices et la dispersion semblent être indépendants des pH.

---

(1) *J. Chem. Soc.*, **21**, 1927, p. 1250.
(2) *J. amer. Soc.*, **47**, 1925, p. 1194.

ÉLECTRO-OPTIQUE. — *Remarques sur la théorie de l'électrostriction et son contrôle expérimental.* Note (1) de MM. **G. Bruhat** et **M. Pauthenier**, présentée par M. A. Cotton.

Il est intéressant, au point de vue du contrôle expérimental, de calculer l'électrostriction isotherme ou adiabatique en fonction des quantités directement mesurables $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_{T,E}$, $\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{p,E}$, $\left(\frac{\partial n}{\partial p}\right)_{T,E}$, $\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{p,E}$.

1° *Électrostriction isotherme.* — Nous avons établi précédemment (2) la formule donnant la variation de volume due à l'établissement du champ E,

$$\Delta v = \frac{v_0 E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_{E,T}. \tag{1}$$

Considérons le cas le plus général, où le milieu devient biréfringent sous l'action du champ. Soient N l'indice primitif du liquide, n_e et n_o les indices extraordinaire et ordinaire, n l'indice qu'on en déduit par la relation $\frac{n_e - n}{n_o - n} = -2$. Les variations d'indice observées sont données par des relations telles que

$$n_e - N = (n - N) + (n_e - n),$$

où le premier terme est relatif à l'électrostriction et le second à la biréfringence. Cette relation a un sens, parce que les deux phénomènes sont dus à des mécanismes différents : d'une part il existe des liquides pour lesquels $n_e - n$ est négligeable devant $n - N$ et pour lesquels le déplacement des franges correspond uniquement à ce dernier terme; d'autre part l'un de nous (3) a pu réaliser des charges de très courte durée pour lesquelles le champ est complètement établi, tandis que la variation isotrope du volume n'est pas encore réalisée : ces expériences montrent que n n'est pas modifié par l'établissement du champ à volume constant, et que, pour des transformations isothermes, il n'est fonction que de v, c'est-à-dire que les deux dérivées $\left(\frac{\partial n}{\partial v}\right)_{p,T}$ et $\left(\frac{\partial n}{\partial v}\right)_{E,T}$ sont égales.

Partons de ce résultat expérimental et abandonnons la formule de Lorentz.

---

(1) Séance du 30 avril 1928.

(2) G. Bruhat et M. Pauthenier, *Journal de Physique*, 6, 1925, p. 1.

(3) M. Pauthenier, *Annales de Physique*, 14, 1920, p. 239.

La variation d'indice dans l'électrostriction isotherme est

$$(2)\qquad \Delta n = \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi}\right)_{p,\,T} \Delta\varphi = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\,\frac{\partial n}{\partial p}\right)_{T,\,E}.$$

2° *Électrostriction adiabatique réversible.* — On passe de l'électrostriction isotherme à l'électrostriction adiabatique à l'aide des formules données par M. Raveau ([1]) et par nous-mêmes (*loc. cit.*, § 6). L'établissement adiabatique du champ s'accompagne d'une variation de température :

$$(3)\qquad \Delta T = -\frac{T}{JC\rho}\,\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{p,\,E}.$$

Le passage de l'état d'équilibre p, T, o à l'état d'équilibre p, T + ΔT, E, qui constitue l'électrostriction adiabatique, peut être réalisé par la succession de deux transformations plus simples, échauffement sous champ nul de p, T, o à p, T + ΔT, o, et électrostriction isotherme de p, T + ΔT, o à p, T + ΔT, E. On obtient ainsi immédiatement la variation d'indice :

$$(4)\qquad \Delta n' = \Delta n + \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{p,\,E} \Delta T = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\,\frac{\partial n}{\partial p}\right)_{E,\,T} - \frac{T}{JC\rho}\,\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\,\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{p,\,E}.$$

3° *Contrôles expérimentaux.* — Dans l'article cité, nous avions calculé les dérivées de ε et de n par la formule de Lorentz-Lorenz; rapprochons les valeurs ainsi obtenues pour les quantités $B = \frac{8\pi\,\Delta n}{E^2}$ et $B' = \frac{8\pi\,\Delta n'}{E^2}$ de celles que fournissent les formules précédentes ($\lambda \doteq 589^{m\mu}$) :

	B (Lorentz).	B (form. 2).	B′ (Lorentz).	B′ (form. 4).
Sulfure de carbone ...	17.10^{-11}	$12,8.10^{-11}$	$10,2.10^{-11}$	$8,6.10^{-11}$
Benzène	$9,6.10^{-11}$	$7,6.10^{-11}$	$6,2.10^{-11}$	$5,5.10^{-11}$

Les deux séries de nombres sont bien du même ordre de grandeur, mais les écarts sont sensibles, et les nouvelles formules augmentent la différence entre les résultats prévus et observés pour le sulfure de carbone, pour lequel le désaccord est provisoirement inexplicable. Les désaccords signalés en 1925 pour les autres corps ne sont pas à retenir, parce que, comme nous l'avions d'ailleurs fait remarquer, ils ne correspondaient alors à aucune détermination précise.

Depuis, l'un de nous ([2]) a réalisé des mesures satisfaisantes sur le tétrachlorure de carbone : pour $\lambda = 436^{m\mu}$, la valeur expérimentale de la quan-

---

([1]) C. Raveau, *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 1121.
([2]) M. Pauthenier, *Comptes rendus*, **182**, 1926, p. 121.

tité B′ est $6{,}25.10^{-11}$. Calculons sa valeur théorique par la formule (4); faute de mesures directes nous admettrons pour $\frac{\partial n}{\partial p}$ la moyenne, $4{,}6.10^{-11}$, entre les deux valeurs théoriques $4{,}25.10^{-11}$ (Gladstone) et $4{,}98.10^{-11}$ (Lorentz); nous prendrons pour $\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}$ la moyenne, $1{,}55.10^{-10}$, entre les deux déterminations directes, $1{,}33.10^{-10}$ (Grenacher) et $1{,}77.10^{-10}$ (Cagniard). Nous obtenons pour B′ la valeur $6{,}1.10^{-11}$.

L'accord est aussi bon que possible : sans que la question soit encore complètement tranchée, faute d'un ensemble suffisant de déterminations expérimentales, un progrès marqué doit déjà être signalé dans la vérification de la théorie thermodynamique de l'électrostriction.

ÉLECTRO-OPTIQUE. — *Les pellicules sphériques électrisées, l'effet photo-électrique et le spectre de fluorescence des rayons X*. Note de M. L. **Décombe**, présentée par M. Ch. Fabry.

On peut rendre compte de la production du spectre caractéristique et du spectre continu des rayons X en considérant toute radiation X monochromatique de fréquence donnée ν comme due aux battements qui interviennent entre les fréquences pulsatoires N_0 et N de deux électrons cathodiques (assimilés à des pellicules sphériques pulsantes) dont l'un est ramené au repos par l'impact et l'autre, simplement freiné, animé d'une vitesse inférieure à la vitesse d'impact. Dans cette hypothèse, on a :

$$\nu = N - N_0, \tag{1}$$

N_0 est déterminé par la relation

$$hN_0 = m_0 c^2, \tag{2}$$

où h désigne la constante de Planck, m_0 la masse de l'électron au repos et c la vitesse de la lumière [1].

Le phénomène inverse (effet photo-électrique des rayons X) paraît justiciable de la même analyse.

Considérons en effet un atome qui reçoit une radiation X de fréquence ν (à laquelle nous pourrons substituer les deux composantes de fréquence N et N_0 aux battements desquelles nous l'attribuons). Cette radiation exerce

(1) *Comptes rendus*, 185, 1927, p. 1263.

sur les électrons orbitaux de l'atome une pression de radiation qui, dans certaines circonstances favorables, peut en déterminer l'expulsion.

Soit W l'énergie orbitale d'un de ces électrons. Sa fréquence pulsatoire N'_0 avant l'expulsion est donnée par la relation

$$W = h(N'_0 - N_0), \tag{3}$$

où N_0 représente comme ci-dessus la fréquence pulsatoire de l'électron au repos. W étant indépendant de la position de l'électron sur son orbite il en est de même de N'_0. Comme de plus W est négatif, il s'ensuit que $N'_0 < N_0$.

Après son expulsion, l'électron possède une certaine vitesse v à laquelle correspond une fréquence pulsatoire

$$N_1 = \frac{N_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4}$$

On a évidemment $N_1 > N_0$ et, par suite, $N'_0 < N_0 < N_1$.

Ceci posé, nous savons que la vitesse v de l'électron photo-électrique, soigneusement mesurée par M. Maurice de Broglie, satisfait à la relation

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = h\nu + W, \tag{5}$$

dans laquelle la quantité *négative* W représente, en valeur absolue, le travail nécessaire pour extraire le photo-électron de son orbite.

Or, si l'on élimine W et $m_0 c^2$ entre (2), (3) et (5), on obtient :

$$\frac{N_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \nu + N'_0,$$

c'est-à-dire en vertu de (4)

$$\nu = N_1 - N'_0. \tag{6}$$

Le second membre de cette relation représente la fréquence des battements qui peuvent intervenir entre la fréquence pulsatoire (N_1) des photo-électrons *expulsés* et la fréquence pulsatoire (N'_0) des photo-électrons de même niveau *non expulsés*. La relation (6) exprime donc qu'il y a résonance entre cette fréquence de battements et la fréquence ν de la radiation incidente.

La relation (6) peut d'ailleurs s'écrire, en tenant compte de (1),

$$N - N_1 = N_0 - N'_0, \tag{6'}$$

et, sous cette forme, elle exprime la résonance entre deux fréquences de battements; la première $(N - N_1)$ intervient entre la composante N de l'onde incidente et la fréquence pulsatoire (N_1) des photo-électrons expulsés et la seconde $(N_0 - N'_0)$ entre la composante (N_0) de l'onde incidente et la fréquence pulsatoire (N'_0) des photo-électrons de même niveau non expulsés.

L'une ou l'autre des conditions (6) *ou* (6') *fournit donc une interprétation ondulatoire simple de la relation* (5).

Cette dernière relation n'implique nullement, comme on le voit, qu'il y ait échange d'énergie par quanta égaux à $h\nu$ entre la radiation incidente et le photo-électron, hypothèse qui soulève de grosses difficultés et ne correspond, semble-t-il, à aucune réalité physique.

Les électrons du niveau W qui s'échappent de l'atome prennent d'ailleurs très rapidement toutes les valeurs de fréquences comprises entre N'_0 et N_1, ce qui fait apparaître, *par voie de résonance*, toutes les radiations X de la série W (spectre de fluorescence) dont les fréquences sont, en effet, toutes inférieures ou égales à $N_0 - N'_0$ et, par conséquent, toutes inférieures à $N_1 - N'_0$ (puisque $N_0 < N_1$).

L'effet Compton s'interprète très simplement aussi par des considérations du même ordre.

OPTIQUE. — *Biréfringence et dichroïsme de couches minces de fer obtenues par distillation*. Note de M. **Marcel Cau**, présentée par M. A. Cotton.

Plusieurs auteurs (Belloc, Biernacki, Houllevigue, par exemple) ont déjà produit des couches métalliques minces par distillation dans le vide. L'opération est très simple pour les métaux peu fusibles comme le fer ou le platine : on élève par le passage d'un courant électrique la température d'un fil ou d'un ruban de métal; la vaporisation devient très rapide à une température nettement inférieure au point de fusion; la vapeur émise vient se déposer sur les parois : c'est le mécanisme du noircissement des lampes à incandescence. La distillation est grandement favorisée en opérant dans le vide.

L'appareil que nous avons utilisé est constitué par un récipient en verre Pyrex fermé par un large bouchon rodé portant deux électrodes métalliques massives entre lesquelles est tendu un fil de fer (pur pour analyses); le vide est obtenu avec une pompe à condensation précédée d'une pompe rotative

à huile; un tube témoin à décharge alimenté par une forte bobine d'induction et un piège à air liquide sont interposés sur la canalisation bon vide. La vapeur métallique est recueillie sur des lamelles de verre placées sur une plate-forme à 1 ou 2^{cm} au-dessous du fil. L'appareil ayant été bien évacué, le fil est chauffé progressivement par le courant d'un accumulateur ou d'un transformateur abaisseur de tension; au début de l'opération, les gaz occlus peuvent se dégager, puis la température du fil est élevée suffisamment pour produire la distillation.

On obtient ainsi avec le fer de belles lames grises par transparence, présentant un beau poli, mais beaucoup moins dures et adhérentes que les lames ionoplastiques : le métal est enlevé facilement par un frottement modéré.

Ces lames, traversées normalement par un faisceau de lumière monochromatique rectilignement polarisée, produisent une rotation et une ellipticité décelées et mesurées par un analyseur convenable. Cet effet, entrevu par Dziewulski [1], présente une analogie avec ceux observés par Kundt sur les lames ionoplastiques et par Braun sur les lames obtenues par l'explosion d'un fil.

Pour préciser la nature de cet effet, nous avons monté la lame étudiée sur un limbe divisé en degrés placé entre un polariseur Glazebrook et un analyseur Chaumont soigneusement réglés sur un faisceau monochromatique provenant d'une lampe à vapeur de mercure de grande brillance suivie d'un séparateur de radiations.

La lame peut ainsi tourner autour du rayon moyen du faisceau lumineux. Pour des azimuts A régulièrement répartis, nous avons mesuré la rotation R (angle du grand axe de la vibration transmise avec la vibration rectiligne incidente, positivement à droite) et l'ellipticité E $\left(E = \text{arc tang}\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right.$ étant le rapport des axes de la vibration compté positivement pour une vibration à droite$\left.\right)$.

Nous avons exécuté ces mesures avec des lames d'épaisseurs diverses; pour toutes nous avons trouvé les résultats suivants :

1° Les variations en fonction de A, de R et de E sont bien représentées par des sinusoïdes;

2° La période de ces sinusoïdes correspond à un demi-tour de la lame dans son plan;

---

[1] W. DZIEWULSKI, *Physikalische Zeitschrift*, 13, 1912, p. 642.

3° Les variations de R et de E sont concordantes;

4° En appelant *axe* de la lame la direction parallèle au fil générateur, R et E sont nuls si l'axe est parallèle ou perpendiculaire à la vibration incidente.

On vérifie d'ailleurs que les valeurs moyennes de R et de E sont nulles dans les limites de précision des mesures.

Exemple. — Lame assez transparente : densité optique brute pour $\lambda = 546^{m\mu}$: 0,63. Pour $\lambda = 546$ et pour un demi-tour :

A°	0.	22,5.	45.	67,5.	90.	112,5.	135.	157,5.
R'	−4	+2	+ 7,2	+ 7,8	+2,1	−3,7	− 8,2	− 7,8
E'	−6,2	+4,4	+12,5	+14,0	+7,5	−3,9	−12,2	−15,0

Pour A = 0 l'axe est de quelques degrés à gauche de la vibration incidente.

Ces résultats s'expliquent entièrement par une biréfringence accompagnée de dichroïsme : une biréfringence seule donnerait une rotation négligeable, un dichroïsme pur ne donnerait pas d'ellipticité. Les directions principales sont respectivement parallèles et perpendiculaires à l'axe du fil générateur.

L'effet est localisé dans le dépôt métallique : il disparaît entièrement si l'on enlève le fer par frottement. Il est provoqué par le champ magnétique du courant produisant la distillation : sous son influence les atomes de la vapeur tendent à s'orienter et conservent leur orientation après leur dépôt sur la lamelle qui les reçoit. Cette orientation est d'ailleurs stable : un champ magnétique intense parallèle à la lame n'a pas modifié l'effet.

Ces indications seront complétées et précisées dans une Communication ultérieure.

PHOTOCHIMIE. — *Sur la photolyse de l'aldéhyde benzoïque.*

Note de M. **Marc de Hemptinne**, présentée par M. Jean Perrin.

Le spectre d'absorption de la benzaldéhyde à l'état de vapeur étudié dans ce laboratoire par M. Almasy présente trois régions d'absorption essentiellement différentes. Les deux premières, correspondant à deux états électroniques différents, se trouvent entre 3800 Å et 3100 Å et entre 2966 Å et 2610 Å; l'absorption dans ces deux régions est constituée par de nombreuses raies fines, qui correspondent à une quantification des vibra-

tions atomiques et de la rotation moléculaire. La troisième région composée de quelques bandes floues sans structure fine et d'une bande large continue s'étend de 2500 Å jusqu'au delà de 2200 Å.

D'après les idées de V. Henri [1], développées ensuite par V. Henri et R. Wurmser [2], les rayons correspondant aux bandes floues produisent une excitation telle que la rotation n'est plus quantifiée, la vibration l'étant encore, la molécule passe alors à l'état de prédissociation. Enfin la partie d'absorption totale du spectre supprime toute quantification tant de vibration que de rotation; ces rayons produisent une dissociation des masses vibrantes de la molécule.

Il était donc à prévoir que la benzaldéhyde se décomposerait sous l'influence de rayons de longueur d'onde inférieure à 2500 et sous ceux-là seulement. Il était également probable qu'obéissant à la règle générale de photolyse des aldéhydes, l'aldéhyde benzoïque se décomposerait en benzène et oxyde de carbone.

Pour déterminer ce fait expérimentalement, nous avons introduit de la vapeur de benzaldéhyde à la pression de $0^{mm},2$ à 18° dans un tube en quartz de 30^{cm} de longueur, préalablement bien évacué (p moins de $\frac{1}{10000}$ de millimètre. Nous avons soumis ce tube à l'action de rayons produits tantôt par une lampe à vapeur de mercure, tantôt par une forte étincelle condensée entre électrodes de fer. Pour isoler les différentes parties du spectre, nous nous sommes servis de filtres. La formation de benzène fut déterminée spectroscopiquement par l'apparition des bandes caractéristiques 2471,8 Å, 2529,5 Å et 2589,73 Å. La présence de CO fut déterminée par l'analyse chimique.

Résultats. — 1. La lumière totale provenant d'une lampe à vapeur de mercure en quartz ou d'une forte étincelle de fer provoque rapidement une décomposition de l'aldéhyde benzoïque en benzène et CO.

2. Si l'on intercepte tous les rayons de $\lambda < 2700$ Å (par une solution à 5 pour 100 de benzène dans l'hexane sous une épaisseur de 1^{cm}), aucune trace de décomposition n'est produite, même pour une illumination prolongée pendant 15 heures. Ces rayons sont pourtant fortement absorbés par la vapeur d'aldéhyde benzoïque.

3. Si on laisse passer les rayons compris entre 2600 et 2405 Å en inter-

---

(1) V. Henri, *Structure des molécules*, Paris, 1925.

(2) V. Henri et R. Wurmser, *Journ. de Phys.*, 6e série, 8, 1927, p. 289.

posant un filtre formé d'un tube de 20^{cm} rempli de chlore (absorbant tous les rayons de longueur d'onde compris entre 4400 et 2600 Å) et d'un filtre composé d'une solution d'acide crotonique dans de l'eau à la concentration de $\frac{n}{35}$ sous une épaisseur de 1^{cm}, qui absorbe tous les rayons de longueur d'onde inférieure à 2405 Å, on observe très rapidement une décomposition de l'aldéhyde en benzène et CO.

4. Lorsqu'on porte la vapeur d'aldéhyde benzoïque à la pression de $0^{mm},2$ à une température de 208°, le spectre d'absorption est très fortement modifié, les bandes fines comprises entre 2966 et 2610 Å deviennent floues et continues et l'on voit en plus dans cette région une absorption générale continue.

5. A la température de 208°, la vapeur d'aldéhyde est décomposée en benzène et CO sous l'influence des rayons de $\lambda > 2700$ Å, qui ne produisent aucune action à la température ordinaire.

6. Par élévation de la température seule sans illumination, la vapeur d'aldéhyde n'est pas décomposée tant que la température est inférieure à 400°. Ce n'est qu'au-dessus de 400° que l'on observe une décomposition thermique avec apparition des bandes du benzène.

Le fait que cette décomposition simple a échappé jusqu'à présent est probablement dû à ce que l'on opérait sur des solutions de benzaldéhyde et non sur ce corps à l'état de vapeur. D'après Ciamician et Silber [1], l'action de la lumière sur l'aldéhyde benzoïque en solution dans l'alcool produit une transformation en hydrobenzoïne, isohydrobenzoïne et résines.

Il est donc prouvé que les rayons ultraviolets de $\lambda < 2600$ Å décomposent la vapeur d'aldéhyde benzoïque en benzène et oxyde de carbone et que, conformément aux idées de V. Henri et R. Wurmser, c'est bien la partie d'absorption totale du spectre qui produit la photolyse, les autres parties du spectre produisant uniquement une excitation de la molécule.

---

(1) *Berichte der Deutschen chem. Gesellschaft*, **34**, 1901, p. 1538; **36**, 1903, p. 1575.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur l'effet des antidétonants en phase vapeur.* Note de MM. **Aubert**, **Dumanois** et **Pignot**, présentée par M. A. Cotton.

Deux d'entre nous ont montré précédemment que les antidétonants, et parmi eux celui qui est le plus actif : le plomb-tétraéthyle, n'avaient aucune influence sensible sur la valeur de la température d'inflammabilité d'un mélange carburé enflammé par compression adiabatique ([1]).

Par ailleurs, l'hypothèse avait été émise par l'un d'entre nous que les phénomènes observés dans les moteurs à explosion pouvaient s'expliquer d'une part par l'effet des antidétonants en phase liquide conformément aux hypothèses de MM. Moureu, Dufraisse et Chaux, d'autre part par une action possible en phase gazeuse se traduisant par un retard de combustion ([2]).

Des expériences ont été effectuées avec des mélanges d'air et d'hexane et différents antidétonants, pour rechercher l'effet de ceux-ci sur l'allure de la combustion obtenue par compression adiabatique.

Le dispositif opératoire employé est celui qui a été utilisé précédemment, complété par un enregistrement photographique des temps et des pressions ; l'échelle des temps est obtenue en inscrivant les vibrations d'un diapason donnant le $\frac{1}{250}$ de seconde; sur les photographies, cette durée occupe une longueur d'environ 11^{mm}.

Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant. Nous y donnons sous le titre : « Durée de l'accroissement de pression », le temps en $\frac{1}{250}$ de seconde, écoulé entre l'inflammation et l'élongation maximum du manographe :

Taux de compression volumétrique 8,25
Température au début de la compression...... 50°

Nature du mélange.	$\frac{\text{Air}}{\text{Hexane pur}}$ en poids.	Durée de l'accroissement de pression en $\frac{1}{250}$ de sec.
Air-hexane pur.....................	17,52	1,06
Air-hexane à 5 % de $Pb(C^2H^5)^4$.......	17,52	2,82
» de toluidine.........	17,54	2,50
» d'alcool méthylique..	17,56	1,57
» de sulfure d'éthyle...	17,54	1,36

([1]) *Comptes rendus*, **182** 1926, p. 376; **185**, 1927, p. 1111.
([2]) *Comptes rendus*, **182**, 1926, p. 1526; **186**, 1928, p. 292.

Ces résultats montrent que les antidétonants agissent en phase gazeuse pour augmenter la durée de combustion. En particulier avec le plomb tétraéthyle qui est le plus actif d'entre eux le maximum de pression au lieu d'être atteint par une progression rapide et, qui à cause de cela, paraît continue (*fig.* 1) semble l'être d'une façon plus lente et par paliers successifs (*fig.* 2).

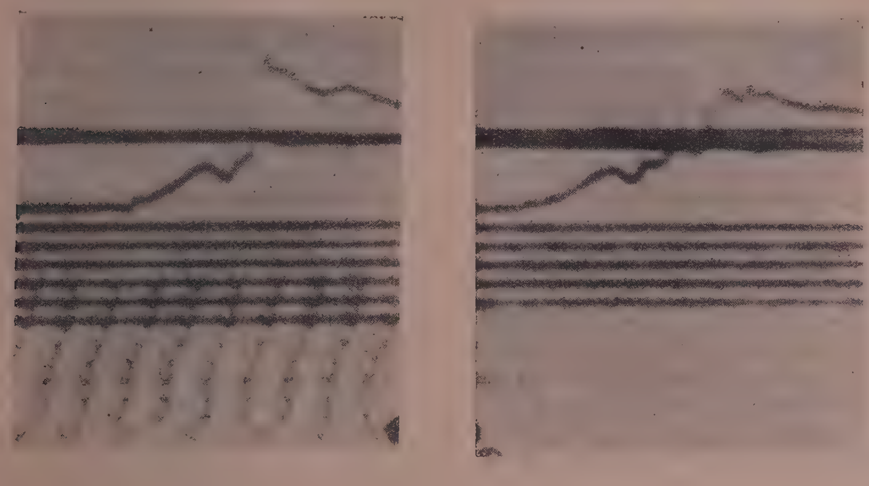


Fig. 1. Fig. 2.

Si l'on suppose que les réactions complexes, comme les combustions d'hydrocarbures sont, en fait, une succession d'oxydations de plus en plus profondes, les résultats que nous avons obtenus avec le plomb tétraéthyle trouveraient une explication. Son rôle serait d'assurer une évolution plus complète de chacune des phases successives.

Nous devons faire remarquer toutefois que dans ces essais effectués en phase vapeur, nous avons dû employer, pour mettre très nettement le phénomène en évidence, des doses d'antidétonants notablement supérieures à celles qui, pratiquement, sont utilisées dans les moteurs où une partie de l'essence est sous forme liquide.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Étude sur l'acidité des jus de fruits et des confitures.* Note de M. C.-F. **Muttelet**, présentée par M. Lindet.

Lorsque, dans un jus de fruit ou dans une confiture, on se propose de doser les acides végétaux, par exemple les acides citrique et malique, il y a lieu d'éliminer, au préalable, les matières pectiques.

Le procédé classique consiste en une précipitation alcoolique. Mais pour obtenir un résultat satisfaisant, il faut employer des doses massives d'alcool, puisque les matières pectiques ne sont insolubles que dans un milieu de titre alcoolique fort élevé (90° env.). De telle sorte que ce procédé, outre qu'il exige la manipulation de grandes quantités de liquide, est d'autre part assez coûteux.

Pour parer à ces inconvénients, il m'a paru intéressant de tenter l'élimination des pectines, en les transformant, par hydrolyse, en acide pectique : corps à peine soluble dans l'eau et dont le sel de baryte est insoluble en milieu acétique. Voici comment il convient d'opérer.

Le jus de fruit ou la confiture sont repris par l'eau au bain-marie. L'insoluble est séparé sur filtre, où il est soigneusement lavé à l'eau chaude. Le filtrat refroidi à 15° C. est étendu à un volume tel, que l'acidité de 100^{cm^3} correspond à environ 4^{cm^3} de potasse normale.

Ces 100^{cm^3} sont additionnés de 5^{cm^3} de soude au dixième et le tout est abandonné à la température de 15° C. pendant une nuit. Les pectines sont ainsi hydrolysées et transformées en acide pectique. Celui-ci est alors séparé de sa solution alcaline au moyen de l'un des deux procédés suivants :

a. Précipitation à l'état d'acide pectique. — La solution hydrolysée est acidifiée par 10^{cm^3} d'acide chlorhydrique au dixième; puis additionnée, peu à peu, et en agitant de 85 à 90^{cm^3} d'alcool à 95°, de façon à obtenir un volume total de 200^{cm^3} à 15° C. Le précipité est jeté sur filtre; il peut servir ultérieurement au dosage de l'acide pectique. Dans le filtrat on dose les acides végétaux.

b. Précipitation à l'état de pectate de baryte. — La solution hydrolysée est additionnée de 20^{cm^3} d'acide acétique au dixième, puis de 10^{cm^3} d'acétate de baryte au dixième. On agite, refroidit à 15° C. et complète à 200^{cm^3}. Le pectate de baryte est recueilli sur filtre et sert au dosage éventuel de l'acide pectique.

C'est alors que, dans 100^{cm^3} de chacun des filtrats *a* et *b*, ainsi débarrassés des pectines, on procède au dosage des acides citrique et malique suivant le mode opératoire que j'ai décrit antérieurement [1].

Voici, à titre d'exemple, les résultats fournis par l'analyse d'une gelée de groseilles « pur fruit » du commerce. La gelée ne contient pas d'acide malique; son acidité totale peut donc être exprimée, pratiquement, en acide citrique. Il est alors facile de comparer cette acidité totale à l'acidité citrique obtenue au moyen des différents procédés de dosage et rapportée à 100^{g} de confiture :

---

[1] *Annales des falsifications*, 1909, p. 383 et 1922, p. 196.

1° Dosage direct alcalimétrique........................ 1g,44
2° Dosages après élimination des pectines :
 a. par précipitation à l'état d'acide pectique.......... 1g,36
 b. par précipitation à l'état de pectate de baryte...... 1g,35
 c. par précipitation avec 5 volumes d'alcool.......... 1g,51

Il y a donc concordance entre les pourcentages *a* et *b*. Quant au dernier *c*, obtenu après précipitation alcoolique, il est en léger excès sur les deux premiers : très probablement par suite d'une élimination encore insuffisante des matières pectiques, malgré l'emploi de 5 volumes d'alcool.

Les deux procédés que j'ai décrits dans cette Note me paraissent ainsi recommandables dans l'analyse des confitures et des gelées, notamment lorsque, pour ces dernières, la gélification a été facilitée par addition de matières pectiques.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Stabilité comparée des isomères suivant leurs spectres d'absorption.* Note (1) de Mme **Ramart-Lucas**, présentée par M. Charles Moureu.

Il est de première importance, en ce qui regarde les transpositions intramoléculaires, non seulement d'élucider le mécanisme de ces transpositions, mais aussi de connaître et de prévoir les conditions dans lesquelles tel ou tel isomère peut se former.

Poursuivant mes recherches en ce sens, et persuadée que l'étude des spectres d'absorption (qui à ce que je crois n'ont pas été utilisés à cette fin) pourrait accroître nos connaissances dans ce domaine; j'ai suivi au spectrographe (absorption dans l'ultraviolet, exploré de $0^{\mu},40$ à $0^{\mu},22$) certaines transformations monomoléculaires. Ayant plusieurs fois observé que la transformation, de dérivés labiles en dérivés stables, s'accompagnait d'un déplacement de l'absorption vers le visible (fréquences plus faibles), je me suis demandé s'il n'y avait pas là une règle générale, et j'ai mesuré dans l'ultraviolet l'absorption de nombreuses substances susceptibles de subir (sous l'influence : de la chaleur, de certaines radiations ou de catalyseurs) soit une isomérisation, soit une transformation intramoléculaire accompagnée d'élimination d'eau, d'acide ou de sel. (J'ai fait environ 500 clichés relatifs à une centaine de substances.) Ces mesures, et celles qu'avaient

(1) Séance du 23 avril 1928.

faites divers savants [1], me semblent permettre d'énoncer les deux règles suivantes :

I. *Quand deux substances* A, A' *peuvent se transformer l'une dans l'autre, la vitesse de transformation sera plus grande dans le sens* $A' \rightarrow A$ *si, pour une même valeur du coefficient d'absorption, la fréquence correspondant à* A *est plus faible que celle qui correspond à* A', *ou, plus brièvement, si la branche ascendante de la courbe d'absorption de* A *est plus près du visible que celle correspondant à* A'.

J'ai d'autre part observé que, dans les cas où la chaleur de combustion est connue, celle du corps A ainsi défini est toujours inférieure à celle de A'.

Pour ces cas, la règle précédente correspond à la règle du déplacement de l'équilibre dont, en fait, on ne paraît pas s'être servi pour atteindre le but ici poursuivi; sans doute faute de données thermochimiques. On sait en effet que, lorsque deux corps A et A' peuvent se transformer l'un dans l'autre; et que A est celui dont la formation est exothermique, il sera le plus stable aux basses températures. En sorte que, si A' a été obtenu de façon quelconque, il suffira souvent d'élever un peu la température (ce qui réduit la durée de mise en équilibre), pour voir pratiquement disparaître ce corps A'. [Nous supposons ici que la température reste assez basse, pour que A' ne soit pratiquement pas représenté dans l'équilibre véritable; à haute température, on sait que l'équilibre est déplacé en faveur du composé endothermique [2].]

Parmi les transformations ici considérées au point de vue de l'absorption, je citerai : celles des halogénures primaires en dérivés secondaires et tertiaires; des aldéhydes en cétones; des stéréoisomères; *cis-trans*, des carbures d'éthylène disubstitués dissymétriques en dérivés symétriques, etc. (voir les courbes ci-après).

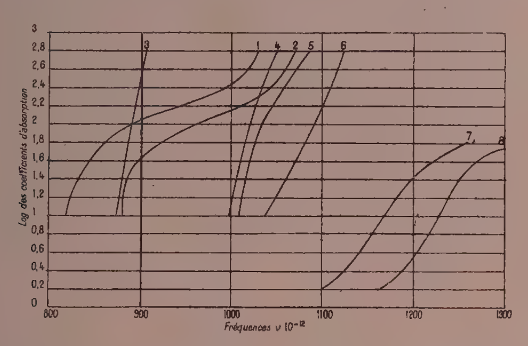
II. *Si la transformation est accompagnée d'un départ d'eau, d'acide ou de sel, et s'il peut se faire deux isomères admettant une même forme intermédiaire peu stable, il sera possible dans la plupart des cas, d'obtenir à volonté l'un ou l'autre de ces isomères, si l'on connaît le moyen de former celui qui possède sa courbe d'absorption le plus loin du visible.*

---

(1) Notamment Errera et V. Henri, qui ont observé que l'absorption ultraviolette des dérivés *trans* est supérieure à celle des dérivés *cis* (*Comptes rendus*, **181**, 1924, p. 548).

(2) Je dois signaler que la théorie radiochimique actuelle semble suggérer une disposition des courbes d'absorption inverse de celle en fait observée (il est vrai que les branches ascendantes de ces courbes ont seules pu être tracées).

Parmi les transformations que j'étudie actuellement, je ne citerai qu'un exemple, pour lequel l'observation des règles précédentes m'a permis d'obtenir à volonté l'un des isomères susceptibles de se former. Il s'agit de l'une



1. Désoxybenzoïne; 2. Diphénylacétaldéhyde; 3. Diphényléthylène sym.; 4. Diphényléthylène dissym.; 5. Triphényl-1.3.3-méthyl-2-butène-1 stable; 6. Triphényl-1.3.3-méthyl-2-butène-1 labile; 7. Bromure de butyle tertiaire; 8. bromure d'isobutyle.

des transpositions les plus importantes, et des plus anciennement connues : *celle de l'hydrobenzoïne*. D'après les savants qui l'ont étudiée, il ne se formerait, par déshydratation de ce glycol, que de la diphénylacétaldéhyde et un oxyde diéthylénique. Or, ayant mesuré le coefficient d'absorption de l'hydrobenzoïne, de la diphénylacétaldéhyde et de la désoxybenzoïne, j'ai constaté que les courbes d'absorption de ces deux derniers (isomères) étaient suffisamment éloignées l'une de l'autre, pour prévoir comme possible la transformation : hydrobenzoïne→désoxybenzoïne, en opérant la déshydratation à une température suffisamment élevée. Effectivement, en faisant passer l'hydrobenzoïne sur des agglomérés de terre d'infusoire, à 300°-400° sous 20^{mm}, j'ai obtenu presque quantitativement de la désoxybenzoïne.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur une nouvelle réaction des disulfisatydes.* Note de MM. **A. Wahl** et **Lobeck**, présentée par M. Matignon.

La modification qui a été apportée à la méthode de Laurent dans la préparation des disulfisatydes permet, désormais, d'obtenir très aisément ces dérivés des isatines à l'état pur et avec de bons rendements [1]. Comme, d'autre part, les disulfisatydes sont des composés dont les réactions offrent un grand intérêt, leur étude, fort négligée jusque-là, en est rendue ainsi beaucoup plus facile.

---

[1] A. Wahl et Féricean, *Comptes rendus*, 184, 1927, p. 826.

Laurent avait déjà signalé le dédoublement que subit la disulfisatyde au contact de l'air, par les alcalis caustiques et froids, en indine (isoindigotine) et isatine, les alcalis carbonatés à chaud et l'ammoniaque provoquent une transformation analogue [1]. Au contraire, ce dédoublement s'effectue d'une manière différente quand on opère au sein de la pyridine et à chaud. Il se forme encore de l'isoindigotine, mais on trouve alors, parmi les produits secondaires, de l'oxindol et du soufre [2]. En ajoutant à ces réactions le fait que l'analyse élémentaire, ainsi que le poids moléculaire, correspondent à la formule $C^{16}H^{12}O^{2}N^{2}S^{2}$, on a proposé de représenter la constitution de la disulfisatyde par le schéma [3]

$$\begin{array}{ccc} (SH) & & (SH) \\ C & \text{———} & C \\ C^6H^4\langle\ \rangle CO & & CO\langle\ \rangle C^6H^4. \\ NH & & NH \end{array}$$

Enfin on a montré qu'en chauffant la disulfisatyde avec du zinc en poudre en milieu acétique, il y a élimination du soufre qui se fixe sur le métal et formation de leuco-isoindigotine [4].

Nous avons pensé qu'il serait intéressant de réaliser un passage direct de la disulfisatyde à l'isoindigotine par l'intermédiaire d'un réactif susceptible d'éliminer à la fois les atomes de soufre ainsi que les atomes d'hydrogène qui, d'après la constitution admise, s'y trouvent rattachés. Le chlorure cuivreux paraît devoir constituer précisément un tel réactif, dont l'action, d'après l'équation

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\begin{array}{c}Cu\,Cl\\SH\end{array}} & \text{———} & \boxed{\begin{array}{c}Cu\,Cl\\SH\end{array}} \\ C & & C \\ C^6H^4\langle\ \rangle CO & & CO\langle\ \rangle C^6H^4 \\ NH & & NH \end{array} = 2CuS + 2HCl + \begin{array}{ccc} C & \text{====} & C \\ C^6H^4\langle\ \rangle CO & & CO\langle\ \rangle C^6H^4 \\ NH & & NH \end{array}$$

devrait fournir de l'isoindigotine.

Or, l'expérience a confirmé ces prévisions. Nous avons reconnu en effet que, si l'on chauffe au bain-marie un mélange de disulfisatyde et de chlorure cuivreux secs et pulvérisés, mis en suspension dans l'acide acétique, le mé-

---

(1) LAURENT, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3e série, 3, 1841, p. 463. — HANSEN, *Ibid.*, 10e série, 1, 1924, p. 117.

(2) A. WAHL et FRAIVRET, *Comptes rendus*, 180, 1925, p. 790.

(3) A. WAHL et HANSEN, *Comptes rendus*, 178, 1924, p. 214.

(4) A. WAHL et HANSEN, *loc. cit.*

lange solide noircit en même temps que la solution se colore en orangé rouge. La réaction peut être activée en élevant la température jusqu'à l'ébullition de l'acide acétique; lorsque la décomposition est terminée, il suffit de filtrer la solution chaude du sulfure de cuivre pour obtenir, par refroidissement, de beaux cristaux orangés brillants dont l'analyse élémentaire ainsi que les propriétés correspondent à celles de l'isoindigotine.

Le rendement n'atteint que 50 à 60 pour 100 de celui indiqué par l'équation précédente; on trouve dans l'isoindigotine des cristaux blancs de soufre que l'on peut extraire par CS^2. D'autre part, en évaporant les eaux mères acétiques on trouve, à côté d'isoindigotine, une petite quantité d'isatine.

Cependant la réaction principale est une réaction générale. Elle s'applique comme nous l'avons observé, aux diméthyl-5.5′ et 7.7′-disulfisatydes ainsi qu'aux dichloro-5.5′ et 7.7′-disulfisatydes qui fournissent, ainsi, les diméthyl et dichloroisoindigotines déjà décrites [1].

Seulement, lorsque l'isoindigotine est peu soluble dans les dissolvants organiques, il n'est pas possible de la séparer ainsi du sulfure de cuivre. Il suffit alors d'essorer et d'éliminer le sulfure métallique en l'oxydant à l'air humide ou bien en traitant le produit par HCl concentré et chaud.

Nous avons également appliqué cette réaction aux naphtodisulfisatydes, encore inconnues et que nous avons préparées au départ des deux naphtisatines. Les naphtodisulfisatydes constituent des poudres presque blanches, totalement insolubles dans les dissolvants organiques et qu'il est, par conséquent, impossible de faire cristalliser. Elles retiennent le soufre qui les accompagne dans leur formation avec une très grande énergie; de nombreux épuisements par le sulfure de carbone ne permettent pas d'abaisser la teneur en soufre au-dessous de 19,7 à 20 pour 100, alors que la formule $C^{24}H^{16}O^{2}N^{2}S^{2}$ en exigerait 15 pour 100. Ces composés présentent cependant les caractères généraux des disulfisatydes. En les soumettant à l'action du chlorure cuivreux on arrive, dans le cas du dérivé de l'α-naphtisatine, à isoler un composé qui est identique à l'*α-dinaphtoisoindigotine*

C=C
CO CO
NH NH

que nous avons préparée par une méthode différente.

---

[1] *Comptes rendus*, **180**, 1925, p. 790, et **186**, 1928, p. 378.

GÉOLOGIE. — *Sur les stalactites.*
Note de M. **J.-A. Le Bel**, présentée par M. Urbain.

M. Maury et moi avons découvert, aux Eyzies en Dordogne, une grotte dont les stalactites présentent des caractères très dignes d'exciter l'intérêt des minéralogistes : en premier lieu ils sont recouverts d'une sorte de végétation formée de filaments calcaires qui vont dans toutes les directions, et en général remontent. Leur origine ne paraît pas due à de l'eau remontant par capillarité, mais plutôt à une chute divisée d'eau incrustante. Ce phénomène est jusqu'ici tout à fait particulier à cette grotte, j'ai adressé des échantillons de ces stalactites au Muséum.

Une autre particularité de ces stalactites et des cristallisations calcaires qui remplissent les poches de la roche crétacée, est de donner des étincelles sous le choc du pic; je les ai pendant longtemps attribuées à des cristaux de silice ou à de la pierre à feu incluse dans les interstices des cristaux, mais à mon très grand étonnement, ce calcaire, dissous dans l'acide chlorhydrique, n'a laissé qu'un peu de silice gélatineuse, il est cependant possible à la rigueur que des lamelles très minces de silice aient pu produire ces étincelles et qu'elles se désagrègent par l'acide chlorhydrique. M. Viré m'a communiqué qu'à la grotte de La Cave les mêmes étincelles se produisent sous le pic, et de plus une traînée phosphorescente marque le passage de la pointe du pic.

Ce phénomène n'est toutefois pas général; M. de Pierpont, administrateur des grottes de Han-sur-Lesse, en Belgique, a eu l'obligeance de rechercher s'il existe aussi dans les grottes en question, mais ne l'a pas constaté. Cette différence peut être due à la rapidité extraordinaire de la formation des stalactites à Han-sur-Lesse.

Il nous paraît désirable que l'on signale avec soin ce phénomène afin de savoir s'il est fréquent, et quelle en est la cause.

HYDROLOGIE. — *Sur la circulation des eaux souterraines dans les alluvions.*
Note de M. **F. Dienert**, présentée par M. Pierre Termier.

Quand on veut capter de l'eau dans une plaine d'alluvions, on a l'habitude de faire un premier puits d'essai dans lequel on pompe pendant une

durée qui dépasse rarement une quinzaine de jours. Au moyen de puits instantanés, enfoncés de 30 à 50^m autour de ce puits, on mesure les effets du pompage sur la nappe souterraine.

On admet que le débit du puits, au quinzième jour de pompage, représente celui que peut donner la nappe étudiée lors d'un captage définitif si, à ce moment, les niveaux de la nappe demeurent constants. Grâce à ces puits instantanés, on peut délimiter la zone d'influence du puits d'essai et connaître à quelle distance on devra creuser un second puits si le débit du premier est reconnu insuffisant. On peut également, au moyen des variations du niveau de l'eau autour du puits, calculer, en se servant soit de la loi de Darcy, soit de celle de M. Boussinesq, la longueur de la galerie à creuser pour obtenir le volume d'eau recherché.

Malheureusement, en pratique, cet essai donne assez souvent lieu à des mécomptes et, après captage, on obtient un débit très inférieur à celui sur lequel on croyait pouvoir compter. C'est qu'on base ses calculs en supposant les alluvions formées de couches très homogènes et qu'on ignore, en réalité, tout des détails de la circulation souterraine. On ne peut réellement résoudre ce problème que si l'on connaît les détails de cette circulation souterraine autour du puits d'essai, et l'on peut y arriver très simplement au moyen de la méthode de prospection par les matières colorantes que nous avons imaginée et mise au point. Cette méthode consiste à introduire, avec certaines précautions, les matières colorantes dans des puits instantanés placés à une distance déterminée, aux quatre points cardinaux du puits pompé et à suivre l'intensité d'apparition de ces matières colorantes à intervalles réguliers dans le puits d'essai. On trace alors la courbe correspondante. L'heure d'arrivée de la matière colorante, apportée par les différents filets liquides partant du point expérimenté, est donnée par l'abscisse de l'ordonnée moyenne de la courbe comprise entre le temps d'apparition et l'heure du maximum d'apparition de la matière colorante.

Voici, à titre d'exemple, les résultats trouvés dans une expérience faite dans la région de Beaulieu, dans les Vals de Loire. Les matières colorantes introduites aux quatre points cardinaux, à différentes profondeurs, autour du puits de pompage et à 30^m de celui-ci, ont donné les résultats suivants :

Lieu d'introduction de la matière colorante.		Temps d'apparition de la matière colorante pour parcourir 30^m.
N du puits	à 7^m de profondeur......	30 heures
	à 4 »	32 »
E du puits	à 7 »	28 »
	à 4 »	40 »
S du puits	à 7 »	10 »
	à 4 »	4 »
O du puits	à 7 »	14 »
	à 4 »	34 »

Ces résultats s'interprètent ainsi : autour de ce puits d'essai le sol est très hétérogène. Il existe au Sud une zone de très facile circulation, principalement à 4^m de profondeur. Dans cette région la vitesse des eaux pompées est considérable et il y a lieu de craindre, lors du captage, que les sables de la partie Sud ne se colmatent en partie par suite de l'entraînement des parties fines du sable par le courant souterrain ayant une grande vitesse.

Ce puits est alors susceptible de voir son débit s'abaisser pendant le captage. D'autre part cette zone de facile circulation constitue une galerie drainante dont le puits de pompage forme l'exutoire. L'intensité de drainage de cette galerie est telle que, lors de l'expérience, au droit du puits, à l'Est, les eaux, au lieu de se diriger directement vers l'Ouest et le puits de pompage, ont, au contraire, été attirées par cette partie drainante et ont pénétré dans le puits par le Sud. Le puits d'essai donnait un fort débit à cause de cette galerie drainante naturelle qui captait l'eau sur une grande longueur.

Ces essais montrent, en outre, qu'il n'est pas toujours possible de se servir des dénivellations de la nappe autour du puits d'essai pour calculer convenablement la longueur d'une galerie creusée en ce point permettant d'obtenir un débit double ou triple de celui pompé. On risquerait de creuser une galerie là où, naturellement, il en existe déjà une et cela sans aucun profit pour le captage définitif.

Cet exemple pris parmi beaucoup d'autres suffit pour montrer l'hétérogénéité des sables en certains points des alluvions et l'intérêt de connaître le détail de la circulation souterraine autour d'un puits d'essai.

L'emploi de notre méthode de prospection a encore une autre utilité : dans l'exemple ci-dessus il est bien évident que le périmètre de protection ne devra pas être circulaire autour du puits ; on l'étendra spécialement vers la partie Sud, car des eaux très contaminées, comme celles provenant d'une fosse d'aisance, ne circulant que peu d'heures dans les sables, ne peuvent être épurées convenablement.

PALÉONTOLOGIE. — *Sur la faune oligocène de Coderet, près Branssat (Allier).* Note (¹) de M. **J. Viret**, transmise par M. Ch. Depéret.

Vers 1850, l'ingénieur Poirrier réunissait à Peublanc et à Saint-Pourçain-sur-Besbre, sur la bordure est du bassin de Saint-Gérand-le-Puy, une faune de Mammifères plus ancienne que celle du calcaire à phryganes étudiée par Pomel. A la mort de Poirrier, ces documents aboutirent en grande partie au Musée de New-York. Vers la même époque, un amateur, Féningre, s'était constitué à Peublanc une petite collection, achetée par le Musée de Munich et récemment décrite par M. Schlosser. Les carrières de Poirrier sont abandonnées, mais j'ai rencontré la faune de Peublanc de l'autre côté de l'Allier, sur la limite ouest du bassin, près de Branssat, au lieu dit le Coderet, dans les fentes d'un calcaire concrétionné contenant *Helix Ramondi* associé à *Helix arvernensis*.

Toutes les espèces de Peublanc se retrouvent en effet à Coderet, sauf *Potamotherium Valetoni* et peut-être *Amphicyon leptorhynchus*. Mais ce deuxième gisement, plus riche, m'a fourni 30 espèces, contre 18 dans le premier.

Voici la liste détaillée des espèces de Coderet :

Insectivores : *Amphidozotherium aff. Cayluxi* (²) Filh. surtout représenté par des humérus semblables à ceux des phosphorites. — *Talpa cfr. brachychir* v. Mey. dont l'humérus est voisin de celui du type d'Ulm. — *Sorex cfr. pusillus* v. Mey. également basé sur un humérus; *Palæoerinaceus arvernensis* Blainv. em. Gerv. mutation ancienne du *Palæoerinaceus* aquitanien.

Chiroptères : *Rhinolophus lemanensis* Revil. paraît identique à l'espèce de Saint-Gérand.

Les formes précédentes sont peu sensibles aux variations d'âge.

Rongeurs : *Sciurus aff. Chalaniati* (²) Pom. Je désigne ainsi provisoirement ce petit écureuil, voisin par sa taille du *Sciurus* aquitanien pour lequel je manque de termes de comparaison. — *Sciurus sp.* espèce plus grande, insuffisamment connue. — *Issiodoromys pseudanæma* Gerv. très semblable, d'après quelques dents isolées, à l'espèce du stampien moyen de la Limagne. — *Plesiosminthus Schaubi* Nob., petit Zapodidé, déjà décrit dans une Note antérieure (³). *Archæomys arvernensis* (²) Laiz. et Par. conforme au type

(¹) Séance du 30 avril 1928.

(²) Espèce commune avec Peublanc.

(³) Voir *Comptes rendus*, **183**, 1926, p. 71.

de Cournon. — *Rhodanomys Schlosseri* [1] Dep. semblable à l'*Omegodus* Pomel des Chaufours [2]. — *Cricetodon collatum* Schaub, ancêtre du *C. Gerandianum*, conforme au type de Küttigen que Stehlin synchronise avec Peublanc. — *Rhizospalax Poirrieri* [1] Mill. et Gid. [2]. — *Amphilagus antiquus* [1] Pom. et *Piezodus Branssatensis* Nob. Deux Lagomorphes que je crois devoir maintenir malgré leur similitude de taille; *Piezodus* existe aussi à Saint-Gérand et à Laugnac.

Carnivores : *Cephalogale Geoffroyi* Jourd. D'après une M_2, deux astragales, paraît semblable au carnassier de Billy. — *Plesictis Branssatensis* n. sp. Forme ancestrale du *Pl. lemanensis* Pom., à peine plus petite, mais pourvue d'une M^1 au talon plus grêle, ainsi que d'une petite M^2. A la mandibule, M_1 a ses trois pointes antérieures plus groupées, le tranchant externe de son talon moins soulevé. M_2 est un peu plus développée. — *Plesictis Julieni* n. sp. mut. *sicaulensis* Nob, type ancestral d'un tout petit *Plesictis* aquitanien : M_1 longue de 5^{mm} a son talon externe bien soulevé. — *Stenogale Gaillardi* n. sp. A sans doute précédé *St. Julieni* Filh. De taille plus petite, avec M_1 au trigone antérieur moins étalé, à la pointe interne moins réduite, moins repoussée en arrière; son talon un peu moins court, dont la crête externe est moins individualisée, rappelle celui de *Haplogale* Schloss. — *Amphictis borbonicus* n. sp. Plus petite qu'*A. antiquus* Pom., cette espèce, basée sur un fragment de maxillaire, présente une P^4 plus trapue et devait avoir des tuberculeuses plus développées en largeur, plus cynodictiennes. — *Herpestes sp.* Une mandibule de jeune avec $D_3 D_4$, correspond à un *Herpestes* de la taille d'*H. lemanensis* Pom. — *Proailurus aff. lemanensis* Filh. Fragment de mandibule de cette espèce, déjà connue dans les phosphorites (Teilhard). Représentée au Musée de Bâle, d'après Helbing, par un cubitus.

Ongulés : *Cainotherium aff. Geoffroyi* [1] Pom. Petite forme très abondante, que la présence accidentelle d'un léger diastème entre P_1 et P_2 ne peut faire ranger dans le genre *Plesiomeryx* comme le propose Schlosser. — *Cainotherium commune* [1] Brav. *aff elegans* Pom. Forme de passage entre le type de Cournon et celui de Saint-Gérand. *Amphitragulus primævus* [1] Schloss. et *Amphitragulus Feningrei* [1] Schloss., mal représentées ici. — *Prodremotherium? Bachitherium?* Basé sur une M_2, une D_4. De la taille du *Dremotherium Feignouxi* Pom.; s'en distingue par l'absence totale du pli Palæomeryx. — *Palæocherus Meissneri* v. Mey. mutation *elaverensis* nob. Déjà de la taille du *P. Meissneri*, en diffère par des caractères plus primitifs

---

[1] Espèce commune avec Peublanc.

[2] Voir *Comptes rendus*, 183, 1926, p. 71.

de la dentition et de la patte qui le rapprochent du *Propalæocherus* Stehlin.

Marsupiaux : *Didelphis borbonicus* n. sp. Voisin du *D.* (*Peratherium*) *Bertrandi* Filh. des phosphorites, un peu plus évolué cependant. — *Didelphis cfr frequens* v. Mey. Un peu plus petite que le précédent, mais avec molaires subégales.

Cette liste montre une association d'espèces à affinités stampiennes : *Rhodanomys*, *Issiodoromys*, *Archæomys*, *Amphidozotherium*, *Bachitherium?* avec d'autres annonçant des espèces aquitaniennes : *Titanomys*, *Amphitragulus*, *Palæocherus*.

Deux genres de Rongeurs sont jusqu'à présent limités à ce niveau : *Rhizospalax* et *Plesiosminthus*.

La faune précédente relie visiblement la faune de Cournon, et des Chanfours, avec celle de Saint-Gérand. Des faunes stampiennes, elle n'a plus ni *Lophiomeryx*, ni *Hyænodon*, ni *Microbunodon*. Des faunes aquitaniennes, elle diffère par ses mutations moins évoluées.

J'avais cru d'abord d'après les *Helix* que le gisement de Coderet était d'âge Chattien récent. Après comparaison avec les faunes du calcaire blanc de l'Agenais sur lesquelles MM. Repelin et Stehlin m'ont fourni de précieuses indications, je pense qu'il faut le placer à l'extrême base du Chattien; il correspond à un horizon intermédiaire entre les molasses supérieures de l'Agenais (la Milloque) et le calcaire blanc (Paulhiac, Gans).

PHYSIOLOGIE VÉGÉTALE. — *Formation des vacuoles accessoires chez le* Closterium lunula *Nitzch*. Note de M. **E. Leblond**, présentée par M. Molliard.

Certaines Desmidiées, notamment les espèces du genre *Closterium*, *Penium* et *Pleurotænium*, présentent dans la région apicale de chaque demi-cellule une vacuole généralement permanente dont la signification morphologique et le rôle physiologique ne sont pas encore entièrement élucidés; on sait toutefois, depuis les observations de Fischer (¹), que la trépidation des cristaux de gypse qui y sont inclus ne dépend pas uniquement de l'activité brownienne, mais qu'elle est étroitement liée à l'activité du protoplasme cellulaire. Plus récemment, A. Frey (²), à la suite de

(¹) Fischer, *Jahrb. für wiss. Botanik*, **14**, 1884, p. 133.

(²) A. Frey, *Étude sur les vacuoles à cristaux des Clostères* (*Revue gén. de Botanique*, **38**, 1926, p. 273).

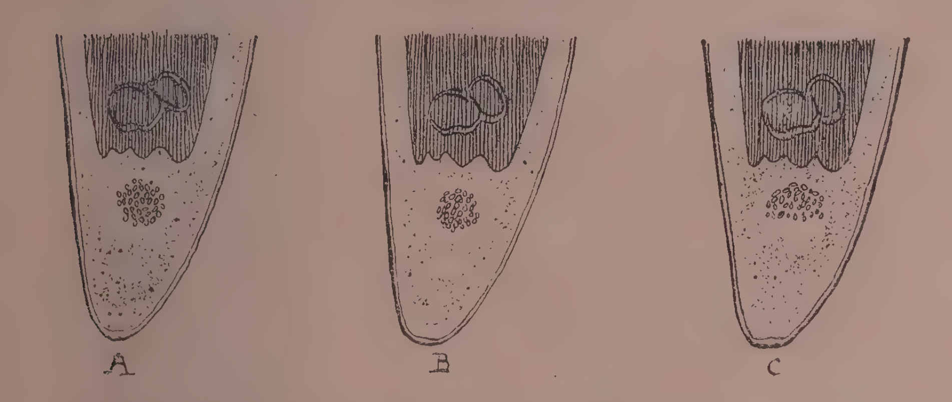
recherches d'une remarquable précision, a découvert que les corpuscules vacuolaires de *Closterium didymotococum* Corda, obéissent rapidement à l'action de la pesanteur et qu'ils affectent par intermittence des mouvements de brusque progression centripète que l'agitation moléculaire seule ne peut expliquer; cet auteur suppose que ces mouvements surajoutés au mouvement brownien, résultent de la projection d'un courant dirigé vers le centre de la vacuole, « comme si le protoplasme qui l'entoure se débarrassait d'un liquide qu'il faisait jaillir sous une certaine pression ».

Les observations que j'ai pu faire sur le *Closterium lunula* Nitzch, transforment en réalité objective l'hypothèse des jets d'excrétion de Frey et apportent une contribution nouvelle à l'étude de l'origine si controversée des vacuoles.

En effet, la portion du cytoplasme de *C. lunula* comprise entre la vacuole à inclusions de gypse et l'apex, se présente à l'observation *in vivo* comme le point de départ et d'arrivée des courants plasmatiques longitudinaux qui parcourent la cellule, d'un pôle à l'autre; ce carrefour examiné sur fond noir donne l'aspect d'un hydrosol dont le brassage micellaire intense est l'indice d'une activité fonctionnelle importante; l'examen en lumière directe le montre comme constitué par d'abondantes granulations dont les migrations incessantes laissent néanmoins percevoir le mouvement brownien qui les anime. La dimension de ces corpuscules mobiles est très variable : elle s'étage des limites de la résolution microscopique jusqu'à $0^{\mu},5$; aucun autre caractère morphologique ne permet de les individualiser et l'emploi des colorants vitaux usuels (rouge neutre, bleu de crésyl, vert janus) n'y laisse percevoir aucune différenciation cytologique.

Suivant certaines conditions favorables qui paraissent coïncider avec les stades préliminaires de la conjugaison, on constate que dans une région indéterminée de l'essaim granulaire, un certain nombre de corpuscules s'écartent progressivement les uns des autres pour délimiter une minuscule vacuole transparente, s'accroissant assez rapidement; dans son voisinage immédiat, d'autres formations identiques éclosent successivement et ne tardent pas à entrer en coalescence pour constituer une vacuole unique dont le diamètre atteint finalement 6^{μ} environ; au bout d'un laps de temps, qui ne dépasse guère 10 minutes, celle-ci entre en contact avec la vacuole à cristaux et s'y fusionne brusquement sous l'influence de la tension superficielle, à la façon de deux gouttelettes d'eau que l'on met en présence (A, B, C de la figure représentent les stades successifs de ce phénomène). L'apparition et la disparition de ces vacuoles accessoires auxquelles il ne

semble pas possible d'assigner actuellement un rôle physiologique défini n'obéissent à aucun rythme chronologique régulier. L'observation vitale ne permet pas de leur attribuer une individualité cytologique réelle; leur formation n'est pas liée à une vacuole préexistante, pas plus qu'elle ne dépend



de la différenciation d'organules spécifiques et prédestinés; d'origine intermicellaire, elles doivent être rangées, en raison de la rapidité de leur formation, au nombre des réactions biocolloïdales.

Les sols émulsoïdes, qui composent le cytoplasme des portions apexiennes de *C. lunula*, sont susceptibles de passer de l'état de sol à l'état de gel; cette mutation structurale de la matière vivante, sur la fréquence et la signification de laquelle j'ai attiré antérieurement l'attention (1), rend vraisemblable la formation de gels parcellaires; étroitement entourés d'hydrosols leur gélification s'effectue aisément; la transformation aboutit à une coagulation qui, suivant les lois de la synérèse [P. Bary (2), W. Kopaczewski (3)] s'accompagne de l'apparition d'un sol assimilable à une véritable sécrétion mécanique que l'on peut considérer comme l'origine des formations vacuolaires.

En résumé, représentant schématiquement la marche du phénomène de

---

(1) E. Leblond, *Le passage de l'état de gel à l'état de sol dans le protoplasma vivant* (*Soc. de Biologie*, **82**, 1919, p. 1150); *L'état de sol dans ses rapports avec l'activité fonctionnelle du proplasma* (*Soc. de Biologie*, **82**, 1919, p. 220).

(2) P. Bary, *Les Colloïdes*. Paris, Dunod, 1921.

(3) W. Kopaczewski, *Introduction à l'étude des Colloïdes*. Paris, Gauthier-Villars, 1926.

la façon suivante :

sol → gel → gélification ⇄ coagulation / sol synérétique (vacuole)

on peut rapporter l'origine des vacuoles accessoires observées chez *C. lunula* à l'apparition transitoire d'un hydrosol syrénétique résultant de la gélification de gels protoplasmiques parcellaires.

ICHTYOLOGIE. — *Sur la transformation et la disparition de certains denticules de la peau du Centrophore granuleux* (Centrophorus granulosus *Mull. et Henl.*). Note de M. **R. Dieuzeide**, présentée par M. Joubin.

Le Centrophore granuleux (*Centrophorus granulosus* Mull. et Henl.), squale commun des côtes algériennes dans les fonds de 600 à 150^{m}, possède une peau susceptible de fournir un très beau *galuchat*. Les écailles sont disposées en effet en un pavage régulier. Chez les adultes elles ont une forme quadrilatère ou mieux losangique. A l'un des angles, celui qui est dirigé vers la partie postérieure de l'animal, se trouve une petite pointe. Tout le reste de la surface est cannelé. Des lambeaux dermo-épidermiques pigmentés séparent les denticules.

Si, par macération à chaud dans la potasse à 10 pour 100, on isole l'écaille, elle est constituée par une sole, surmontée de la plaque losangique dont il vient d'être question. Il est facile de voir la cavité pulpaire et le Haversische Känale de O. Hertwig [*Ueber Bau und Entwickelung der Placoidschuppen und der Zähne der Selachier* (*Jena. Zeitschr. Naturwiss.*, 8, N.F. I. 1874)].

La structure du denticule répond à la description classique : une épaisse couche d'ivoire parcourue par les canalicules où sont logés les prolongements des odontoblastes, est recouverte extérieurement par de l'émail. La sole est constituée par ossification du derme. Dans la pulpe il existe les odontoblastes, des cellules conjonctives, des cellules pigmentaires, des vaisseaux et des nerfs. Au point de vue optique le denticule a un aspect vitreux.

Sur certaines peaux, on peut apercevoir, tantôt en semis, tantôt en abondance telle qu'ils modifient la teinte fondamentale du tégument, des grains blancs, laiteux, opaques, comparés très heureusement par L. Boutan [1] à des grains de sucre. Examinés au microscope bino-

---

(1) L. Boutan, *Étude sur le centrophore granuleux* [*Bull. Station d'Aquiculture et de Pêche*, Castiglione (Algérie), fasc. 1, 1926].

culaire, ils paraissent de plus grande taille que les denticules normaux. En effet, l'épiderme et les couches superficielles du derme sont refoulés à leur périphérie; ils sont « déchaussés ». Leur morphologie externe est celle de l'écaille ordinaire, avec la même pointe postérieure, et les cannelures, plus ou moins émoussées cependant. Avec une aiguille, il est facile de l'enlever. On s'aperçoit alors que le grain blanc n'est plus qu'une mince pellicule calcaire, très friable. Cette plaquette, qui se craquèle au moindre choc, repose sur un coussinet de matière gélatineuse. Si l'on extrait cette masse molle, on voit dans le fond de l'excavation ainsi produite une couche mamelonnée, blanc nacré, dense.

Les coupes histologiques viennent éclairer la compréhension d'une telle disposition. La mince lame calcaire est coiffée par l'émail, mais par un émail très modifié au point de vue physique. Le reste est une partie de l'ivoire du denticule, souvent creusé de petites niches. On voit encore dans l'ivoire l'extrémité des canalicules contenant un protoplasma granuleux, altéré. Tandis que l'ivoire du denticule normal se colore fortement par l'hématoxyline ferrique, celui du grain de sucre a perdu cette chromophilie.

La couche gélatineuse comprend, tout contre la plaquette, des cellules à noyau tourmenté, logées soit dans les niches, soit tout contre la pellicule, et qui jouent le rôle des ostéoclastes. Je n'ai pu déceler de cellules multinucléées. — Le protoplasma a néanmoins des contours un peu flous. Le reste de la masse est un tissu conjonctif lâche, où apparaissent quelques éléments fibreux.

Enfin la plaque nacrée est un tissu fibreux d'une épaisseur assez considérable qui se raccorde profondément avec le derme sous-jacent.

Le grain de sucre est donc un denticule qui, après destruction de sa sole et d'une partie de son ivoire, est réduit à une mince pellicule qui va se détacher. Épiderme et derme recouvriront la place laissée libre. Il se produit ensuite une régularisation secondaire par croissance des denticules voisins.

Sous quelle influence se produit ce curieux phénomène? Il n'est pas saisonnier; jeunes et adultes présentent de telles écailles blanches. Je n'ai réussi à déceler ni parasites, ni microbes. Il semble s'agir là parfois d'une disparition des denticules vieillis, permettant un accroissement de ceux du pourtour. Ceci est plausible quand les grains blancs sont en semis léger. Mais lorsqu'ils sont en très grand nombre, laissant à nu de grandes plages, cette explication ne saurait être prise en considération. Dans l'état actuel

de la question il est impossible de conclure. En effet le grain de sucre est l'état ultime de la destruction de l'écaille. Je n'ai pu jusqu'ici saisir de stade de début, ni même de stade intermédiaire. Des recherches ultérieures me permettront peut-être d'apporter une solution à ce problème.

BIOLOGIE PHYSICO-CHIMIQUE. — *Action des rayons K de l'aluminium sur quelques microbes.* Note de M. **A. Lacassagne**, présentée par M. Jean Perrin.

Conditions expérimentales. — Des boîtes de Petri, contenant de la gélose ordinaire (légèrement desséchée par un séjour préalable à l'étuve) étaient ensemencées au moyen d'une culture en bouillon, soit à la pipette (le liquide étant soigneusement réaspiré), soit par le procédé du nuage microbien préconisé par Trillat [1].

Tout de suite après l'ensemencement, on irradiait des territoires distincts d'une même boîte, pendant des temps progressivement croissants, la surface de la gélose étant maintenue à 3^{mm} de la fenêtre de sortie des rayons qui mesurait 10^{mm} de diamètre. Le rayonnement était produit par le tube à anticathode et à fenêtre en aluminium décrit par Holweck [2] : courant thermo-ionique 50 milliampères; différence de potentiel aux bornes 3000 volts. L'énergie incidente, dans ces conditions, mesurée à 3^{mm} de la fenêtre, était de 11 ergs par centimètre carré. Les temps de pose ont varié de 1 seconde jusqu'à 10 minutes; les microbes utilisés étaient le *Pyocyanique*, le *Prodigiosus*, le *Staphylocoque* et l'*Enterocoque*. L'irradiation terminée, les boîtes étaient mises à l'étuve jusqu'au développement apparent de la culture.

Faits observés. — Pour tous les microbes utilisés, l'effet est déjà visible pour des poses de quelques secondes. Sur une surface circulaire, correspondant à la fenêtre de sortie des rayons, la culture apparaît moins opaque. Le phénomène est très régulièrement progressif pour des irradiations plus longues. A partir d'un certain temps de pose, les colonies poussent indépendantes au lieu de constituer un enduit homogène; à côté de quelques grosses colonies, on en distingue nettement de très nombreuses beaucoup plus petites. Celles-ci deviennent de plus en plus rares sur les champs suivants;

---

(1) Trillat, *Comptes rendus*, **183**, 1926, p. 1304.
(2) Holweck, *Comptes rendus*, **186**, 1928, p. 1203.

on ne voit bientôt plus que quelques colonies isolées; enfin, une exposition encore plus longue a empêché tout développement, la stérilisation a été obtenue.

Un certain nombre de constatations faites à propos de ces premières expériences méritent d'être mises en évidence.

a. Les doses nécessaires à l'obtention des trois aspects principaux présentés par les champs irradiés — modification visible du développement de la culture, individualisation des colonies, stérilisation totale — varient pour chaque espèce microbienne. Pour le *Pyocyanique*, l'effet d'une irradiation de deux secondes est déjà manifeste, les colonies apparaissent isolées en cas d'irradiation de 40 secondes, mais la stérilisation n'est obtenue qu'avec 5 minutes d'exposition. Pour le *Staphylocoque*, des effets analogues ont demandé 5 secondes, 3 et 10 minutes.

b. Les microbes étudiés se sont rangés, au point de vue de leur sensibilité aux rayons K de l'aluminium, dans un ordre semblable à celui où nous avions déjà pu les classer avec Paulin [1], relativement à leur sensibilité aux rayons β du radon.

c. L'écart entre l'intensité du rayonnement nécessaire, d'une part pour modifier la vitalité des microbes d'une même culture, d'autre part pour entraîner la mort de tous les éléments, est considérable.

d. Entre la dose qui tue le plus grand nombre des microbes ensemencés et celle nécessaire pour la stérilisation générale, l'écart est encore très important (il est de 40 à 300 secondes d'irradiation pour le *Pyocyanique*); des doses intermédiaires ménagent quelques unités microbiennes, irrégulièrement disséminées, qui donnent naissance à des colonies pouvant avoir un développement normal. On peut imaginer deux interprétations de ce dernier phénomène : 1° les éléments microbiens d'une même culture présentent des degrés extrêmement variés de résistance au rayonnement, en raison de l'état physiologique différent où ils se trouvent au moment de l'irradiation; 2° la petitesse de l'énergie nécessaire à l'action sur un microbe permet d'envisager l'absorption discontinue du rayonnement par quanta, et la possibilité pour certains microbes d'être faiblement touchés ou même épargnés au milieu d'un champ irradié. Holweck consacre une Note (voir ci-dessous) à l'exposé détaillé de cette deuxième interprétation.

---

(1) PAULIN, *C. R. Soc. de Biologie*, 92, 1925, p. 61.

BIOLOGIE PHYSICO-CHIMIQUE. — *Essai d'interprétation énergétique de l'action des rayons K de l'aluminium sur les microbes.* Note de M. **F. Holweck**, présentée par M. Jean Perrin.

Rayons utilisés. — Ce sont les rayons K de l'Al (8 Å) pratiquement purs produits au moyen du tube à anode et à fenêtre d'Al de 15$^{\mu}$, décrit précédemment ([1]). Les coefficients massiques d'absorption de ce rayonnement dans la cellophane, l'air et l'Al sont respectivement : 1100, 1300 et 550. Le tube, fonctionnant sous 3000 volts avec 50 milliampères, rayonne au niveau de sa fenêtre 19 ergs par centimètre carré ([2]).

Dispositif expérimental. — Une boîte de Petri garnie de quelques millimètres de gélose était ensemencée au moyen d'un bouillon coulé ou pulvérisé à sa surface. La gélose ensemencée, sur une couche extrêmement mince et pratiquement sèche, était immédiatem nt présentée devant la fenêtre du tube (à 3^{mm}) et plusieurs poses étaient faites à des places différentes sur la même boîte ([3]). Puis on laissait pousser à l'étuve.

Résultats. — Ensemençons, par exemple, avec le B. pyocyanique. On constate qu'il suffit d'une irradiation de 2 secondes, le tube fonctionnant au régime ci-dessus indiqué, pour modifier l'aspect de la culture, l'image de la fenêtre devenant visible. Après une pose de 40 secondes, il ne pousse plus que quelques colonies isolées sur la zone irradiée, mais il faut 300 secondes pour arriver à la stérilisation complète.

L'énergie qui tombe par centimètre carré sur la surface microbienne, distante de 3^{mm} de la fenêtre, est de 11 ergs, les doses sont donc respectivement de 22, 440, 3300 ergs $\times$ sec.

On connaît approximativement les dimensions d'un bacille (1$^{\mu}$ environ) d'autre part, le coefficient d'absorption de la substance organique qui le compose est voisin de celui de la cellophane, on peut donc calculer quelle est la puissance nécessaire pour modifier ou arrêter le développement du B. pyocyanique, on trouve ainsi respectivement 15, 300, 2250.10^{-9} erg$\times$sec.

---

(1) *Comptes rendus*, 186, 1928, p. 1203.

(2) Voir *Conférences Rapports : De la lumière aux rayons X*, 1927, p. 71.

(3) Voir pour les détails de la technique et l'aspect biologique des résultats, la Note ci-dessus de A. Lacassagne.

Interprétation quantique. — Le quantum de la radiation incidente

$$eV = h\nu = 2,5.10^{-9} \text{ erg}.$$

Il suffit donc de 6 quanta absorbés *en moyenne* par un microbe pour modifier l'aspect de la culture, de 120 pour ne laisser que quelques colonies isolées et de 900 pour tout tuer.

La petitesse du nombre de quanta montre qu'il est impossible de considérer l'énergie comme uniformément absorbée par tous les microorganismes. Dans une culture mince, irradiée uniformément, les microbes peuvent absorber des doses individuelles très différentes oscillant autour de la dose moyenne.

D'autre part, on sait que l'absorption des radiations X de grande longueur d'onde dans les atomes légers se produit presque uniquement suivant le processus photoélectrique composé d'Auger. Dans le cas présent le quantum de 1550 volts s'absorbant dans un atome de C, par exemple, donnera naissance simultanément à un photoélectron K de 1260 volts et à un photoélectron L de 258. Le parcours de ces électrons dans la substance du bacille sera petit devant les dimensions de celui-ci (moins de $\frac{1}{10}$ du diamètre). Les ions résultant de l'absorption d'un quantum seront donc extrêmement groupés et l'action chimique d'un quantum très localisée dans une petite partie du microorganisme.

On conçoit ainsi facilement qu'une même quantité d'énergie *moyenne* puisse produire sur des microbes des actions individuelles très différentes, le nombre de quanta et la région de leur absorption étant différents d'un bacille à l'autre, et l'on explique ainsi, en partie tout au moins, l'inégalité surprenante des doses nécessaires pour tuer la majorité des microbes et pour tout stériliser.

En traduisant en ions les nombres précédents, on voit qu'il suffit de libérer en moyenne 300 paires d'ions, c'est-à-dire de modifier 300 molécules d'un B. pyocyanique pour en altérer le développement, que 6000 ions sont mortels pour la majorité des microbes, mais qu'il faut libérer 45000 ions moyens pour être sûr de tout stériliser. Il est bien entendu que les doses individuelles peuvent s'écarter considérablement de la dose moyenne.

Cette action discontinue doit être d'autant plus marquée que le quantum est plus gros; il sera donc intéressant de faire des expériences avec des rayons plus pénétrants, K de Fe, par exemple.

M. P. Painlevé présente un Mémoire de M. Louis Bossut et de feu Pierre Bossut intitulé *De l'action des forces sur les systèmes de corps articulés ou en contact et de la transmission des pressions dans l'intérieur des corps solides.*

(Renvoi à la Section de Mécanique.)

La séance est levée à $16^h 15^m$.

A. Lx.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus pendant les séances d'avril 1928.

Pontificia Accademia delle scienze. *P. G. Hagen S. I.* 1847-1927. Rome, Stab. Tipografico « Aternum », 1927; 1 fasc. 25^{cm}.

Recherches sur les maladies de la vigne. Nouvelles observations sur l'Esca, par Pierre Viala. Paris, Revue de Viticulture, 1928; 1 fasc. 27^{cm}.

Fabrication industrielle des porcelaines. Matières premières et leurs traitements, par Marc Larchevêque. Paris, J.-B. Baillière et fils, 1928; 1 vol. 23^{cm},5. (Présenté par M. Matignon.)

Société française des électriciens. *Remise de la médaille Mascart à Sir* J. J. Thomson. Paris, Société française des électriciens, 1927; 1 fasc. 27^{cm}.

Les origines du cinématographe, par Georges Potonniée. Paris, Paul Montel, 1928; 1 fasc. 18^{cm},5.

Jubilé de M. le professeur Amé Pictet. Aula de l'Université, samedi 26 novembre 1927. Genève, Sonor, 1927; 1 fasc. 23^{cm}.

Temps, espace, relativité, par André Metz. Paris, Gabriel Beauchesne, 1928; 1 fasc. 19^{cm}. (Présenté par M. Fabry.)

Centenaire d'Augustin Fresnel (10 mai 1788-14 juillet 1827). Extrait de la *Revue d'optique théorique et instrumentale*, 6, 1927, p. 493-510; 1 fasc. 24^{cm}.

Serviços Geológicos. *Cartas e Córtes Geológicos feitos debaixo da direcção*, de Paul Choffat. *Distritos de Leiria e Coimbra.* Lisboa, Tipografia do comércio, 1927; 1 fasc. 32^{cm}.

(*A suivre.*)